GUSTAVO ADOLFO OLIVA HERNÁNDEZ

ENSEÑANZA DE ALGUNOS TEMAS DE MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y FÍSICA USANDO HOJAS ELECTRÓNICAS EN EL NIVEL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

UNIVERSIDAD GALILEO
GUATEMALA

FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN DE LA MATEMÁTICA Y LA FÍSICA

GUATEMALA, JULIO DEL 2009

AGRADECIMIENTOS

A Dios

Por permitirme culminar mi carrera y porque de Él viene la sabiduría, el conocimiento y la inteligencia

A mi familia

Por su amor y apoyo incondicional

A la Universidad Galileo

Por ser la fuente de mi formación profesional

A las autoridades de la Facultad de Educación

Por ser facilitadores de la educación

A mis catedráticos y asesores

Por su apoyo y ejemplar trabajo docente

En especial a:

Lic. Manuel Monroy

Ing. Rafael Santiago

A mis compañeros de estudio y amigos

Por su apoyo y amistad

DEDICATORIA

A Dios

Por iluminar mi camino y darme fuerzas para seguir siempre adelante

A mis padres

Gregoria Hernández López

Eufemio Oliva Morales (QEPD)

Por darme la vida y hacerme un hombre de bien

A mi esposa

Lidia Amarilis Campos Porras De Oliva

Por su amor y apoyo incondicional

A mi hijo e hijas

Gustavo Adolfo, Karin Amarilis y Katherine Jeammillette

Por ser la razón principal de mis esfuerzos

A mis hermanos y hermanas

Rosemary, Margoth, Juan Carlos (QEPD), Claudia y Rene

Por su cariño y ejemplo de superación personal

A mi suegra

Himilce Porras de Campos

Por su aprecio incomparable

A toda mi familia y amigos

En especial a tia Modesta Hernández y a mis sobrinos Carlitos, Maribel, Danielito y Andreita

Éste trabajo de graduación fue realizado por el autor como requisito previo a obtener el título de Licenciado en Educación de la Matemática y la Física.

Guatemala, julio del 2009.

ÍNDICE

RESUMEN

En la actualidad la mayoría de estudiantes, profesores y profesionales de diferentes áreas del conocimiento no pueden resolver problemas de Matemática, Física y Estadística usando hojas electrónicas o cualquier otro paquete de software especializado en el cálculo matemático.

Es necesario que profesores en general y especialmente del área científica complementen la enseñanza de las ciencias con el uso de paquetes de software.

En la mayoría de las escuelas no se enseña Matemática, Física y Estadística usando las funciones y herramientas de cálculo de las hojas electrónicas. Algunos libros de texto presentan escasamente ese conocimiento que los estudiantes deben tener para alcanzar un óptimo desempeño en las empresas que constituyen la economía guatemalteca.

Asi que el presente trabajo de graduación pretende ayudar a resolver ese problema mostrando a estudiantes y profesores que muchos procesos de cálculo numérico se pueden desarrollar haciendo uso de hojas electrónicas. Es un documento de consulta para estudiantes, profesores, profesionales y comunidad en general sobre el uso de funciones y herramientas de cálculo de hojas electrónicas. Muestra lo importante, provechoso y fácil que es resolver problemas numéricos usando paquetes de software.

Pero principalmente éste trabajo es una metodología auxiliar en la enseñanza de la Matemática, Física y Estadística.

Los estudiantes de ciencias emplean y aplican grandes cantidades de información. Para facilitar y hacer más eficiente esa tarea es necesario aprender a utilizar herramientas de cálculo electrónico.

Ahora que los sistemas de cómputo están siendo ampliamente usados es indispensable que los profesores enseñen haciendo uso de paquetes de software especializados en el cálculo matemático.

Las hojas electrónicas son una poderosa herramienta que los alumnos aprenden a utilizar para simplificar los procesos matemáticos, estadísticos y para el análisis de fenómenos físicos. El estudiante debe comprender las definiciones y conceptos, y luego mostrarlos empleando paquetes de software.

El presente trabajo de graduación es una metodología auxiliar en la enseñanza de la Matemática, Estadística y Física. Donde se indica como emplear funciones de cálculo de hojas electrónicas para resolver algunos problemas de esas ciencias.

Además de presentar definiciones y conceptos de Matemática, Estadística y Física se muestra que el uso de funciones de cálculo electrónico puede resultar atractivo para el aprendizaje de dichas ciencias y de gran valor en el análisis matemático.

En el capítulo I se explica el uso de fórmulas y funciones en hojas electrónicas.

Operaciones con matrices y sistemas de ecuaciones lineales son resueltos en el capítulo II usando hojas electrónicas.

Gráficas y cálculo del interés simple y compuesto se presentan en el capítulo III, asi como el estudio de anualidades anticipadas y vencidas.

Luego en el capítulo IV se construyen tablas de verdad y se demuestran equivalencias y argumentos lógicos.

A continuación en el capítulo V se efectúan operaciones con números complejos en forma analítica y gráfica. Para ello se emplean herramientas de hojas de cálculo.

El siguiente capítulo es un estudio de Estadística Descriptiva desde el cálculo de medidas de tendencia central y dispersión hasta el análisis de regresión y correlación lineal.

El estudio de algunas distribuciones de probabilidad se desarrolla en el capítulo VII.

En el estudio de la Física, capítulo VIII, se describe el movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente variado y parábolico de un cuerpo.

El teorema del trabajo y la energía cinética y el principio de conservación de la energía mecánica se presentan en el capítulo IX,

En el último capítulo se estudia el movimiento oscilatorio de una masa mediante el uso de objetos de control electrónico que facilitan el análisis de los fenómenos físicos.

La bibliografía fue empleada únicamente como consulta puesto que el contenido del trabajo es el resultado de algunos años de experiencia del autor como catedrático de Matemática, Física, Estadística e Informática.

CAPÍTULO I

1. ESCRITURA DE FÓRMULAS EN EXCEL

1.1. FUNCIÓN

Es una terna ordenada formada por dos conjuntos llamados dominio y contradominio, y una regla, ley o ecuación que asigna a cada elemento del dominio uno y sólo uno de los elementos del contradominio.

EJEMPLOS

Campo de estudio	**Descripción de la función**
Estadística Descriptiva	A cada conjunto de datos numéricos le corresponde una Media Aritmética
Álgebra Lineal	A cada matríz cuadrada la función le asigna un determinante
Mecánica	Para cada distancia que separa a dos masas corresponde una fuerza de atracción gravitacional

1.2. HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

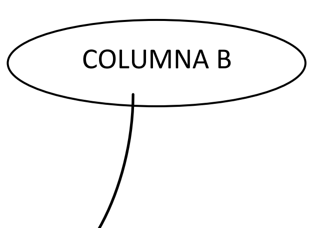
Es un paquete de software especializado en el cálculo matemático. Se puede utilizar para resolver problemas de Matemática, Estadística y Física.

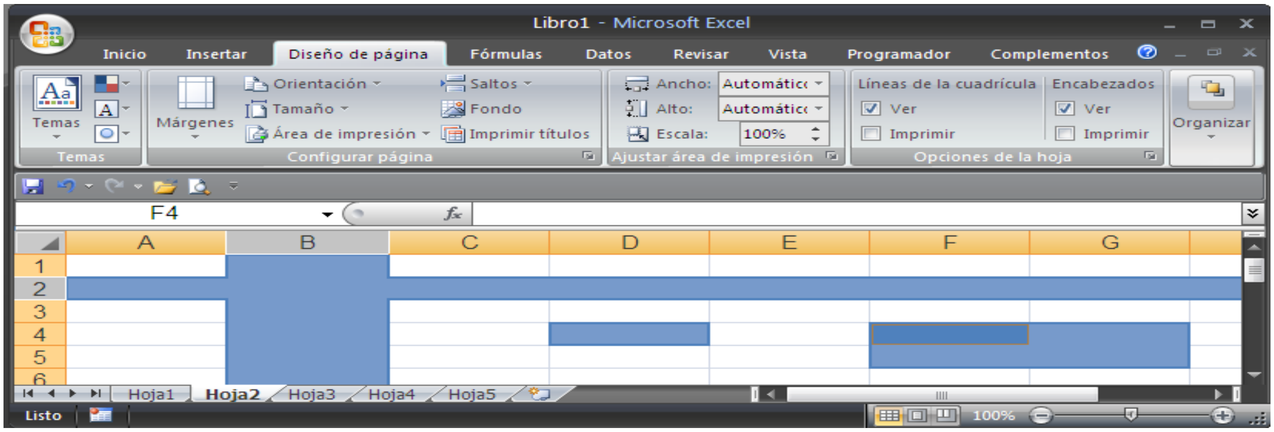
Una hoja de cálculo incluye una gran variedad de funciones que simplifican considerablemente los cálculos matemáticos.

Almacenamiento de información en una hoja electrónica

Los datos o información son almacenados en espacios de memoria llamados celdas. Estas se organizan en forma matricial. Las Filas se representan con los números 1,2,3,… y las Columnas con las letras A,B,C,…,AA,AB,AC,… . Cada hoja de cálculo tiene 1048576 filas y 16384 columnas. Un conjunto de hojas forman un Libro, el número de hojas y libros en uso depende de la capacidad del sistema.

Una celda es la intersección de una fila con una columna. A un conjunto rectangular de celdas se le llama Rango.



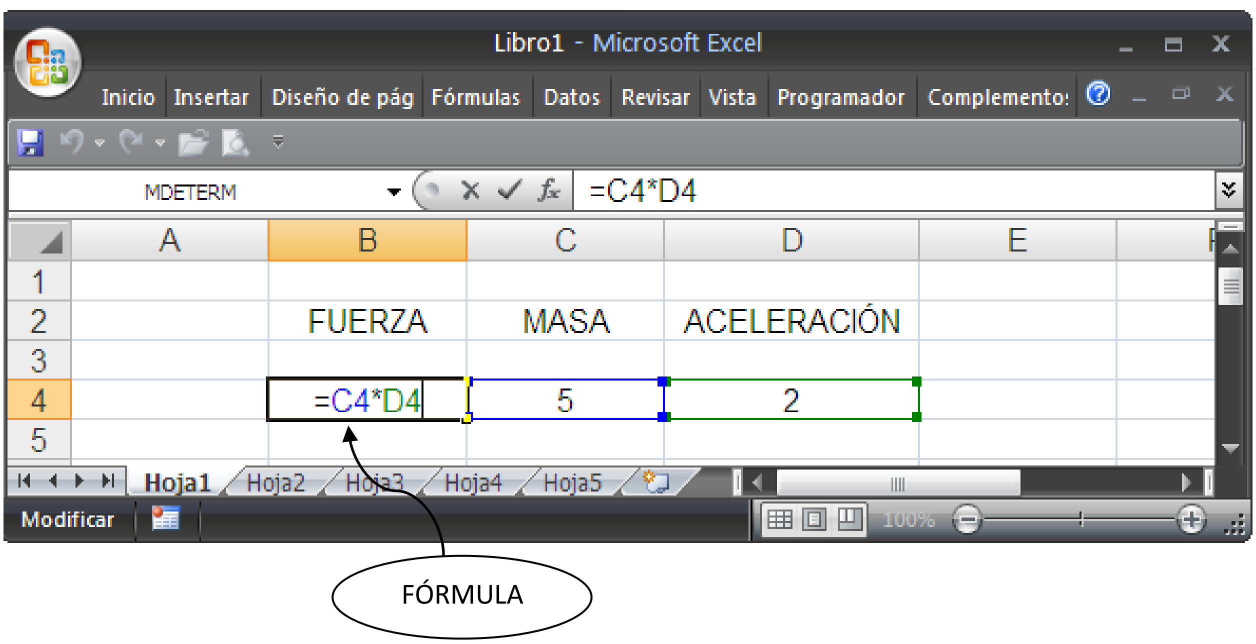


1.3. <u>FÓRMULAS</u>

Son ecuaciones que toman valores de una o más hojas electrónicas para realizar cálculos matemáticos.

<u>EJEMPLO</u> (Segunda Ley de Newton)

F = ma

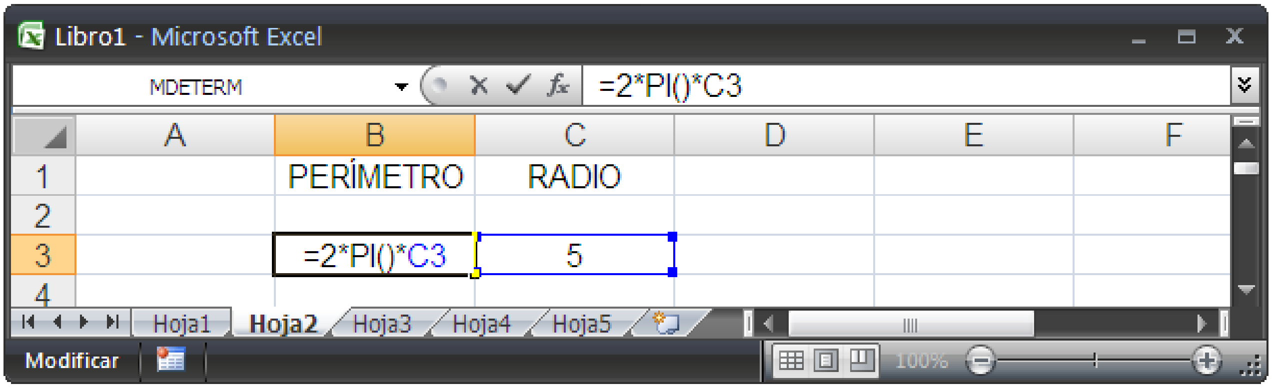


<u>Elementos de una fórmula</u>

Una fórmula inicia con el signo igual y puede ser una combinación de funciones, referencias absolutas o relativas a celdas o rangos, constantes y operadores aritméticos o lógicos.

EJEMPLO (Perímetro de un círculo)

$P = 2\pi r$



Los elementos de la fórmula anterior son:

ELEMENTO	**DESCRIPCIÓN**
2	Constante
PI()	Función que devuelve el valor constante π
*	Operador aritmético de la multiplicación
C3	Referencia relativa al contenido de una celda

La siguiente tabla muestra la lista de operadores ariméticos.

OPERADOR	**OPERACIÓN**
+	Suma
-	Resta
*	Multiplicación
/	División
^	Potenciación
%	Porcentaje

Referencia Absoluta

Una referencia absoluta de celda como A5 referencia siempre al contenido de la misma celda, independientemente que la fórmula que la contiene sea copiada en otras celdas.

Referencia Relativa

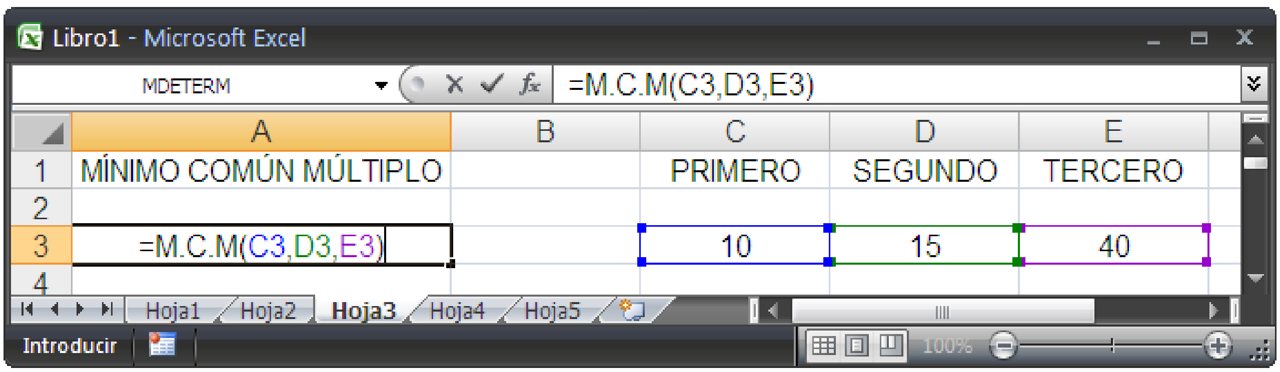
Una referencia relativa de celda como A5 se basa en la posición relativa que contiene la fórmula y de la celda a la que hace referencia.

Para cambiar referencias relativas por absolutas se presiona la tecla F4.

Estructura de una función

Comienza con el signo igual seguido del nombre de la función, los argumentos se escriben entre paréntesis separados por comas.

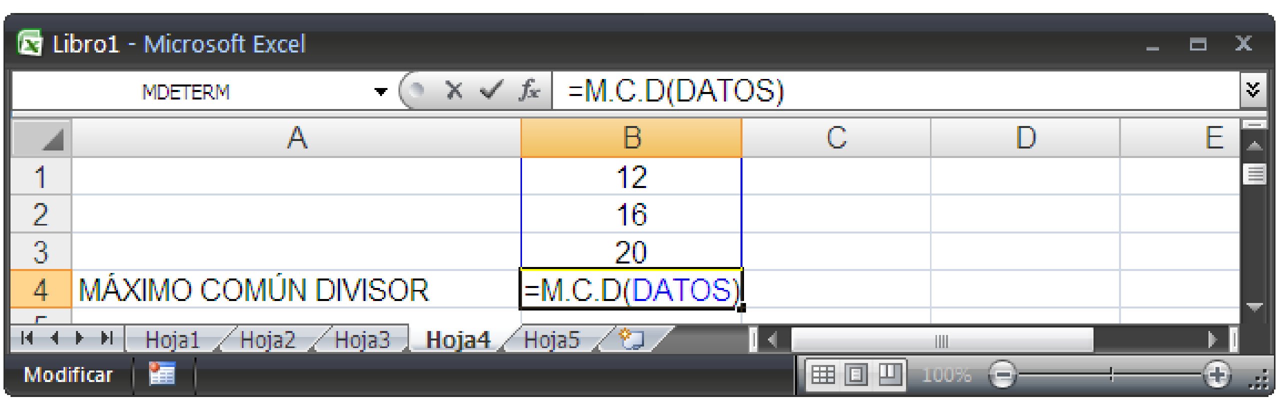
Por ejemplo:



Nombres de rangos

Se puede asignar un nombre a una celda o un rango. Se selecciona el rango, clic derecho sobre él y se elige **asignar nombre a un rango**. Para hacer referencia a la celda o rango se escribe el nombre definido.

Por ejemplo si al rango B1:B3 se le asigna el nombre **DATOS**



CAPÍTULO II

2. ÁLGEBRA DE MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1. MATRÍZ

Una matríz es un arreglo rectangular de números, asi los elementos están dispuestos en filas y columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

La matríz A de orden mxn tiene m filas y n columnas. El elemento a_{ij} está en la fila i y columna j .

Suma de matrices

La suma de matrices está definida para matrices sumandos del mismo orden.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Se suman los elementos correspondientes.

Multiplicación de matrices

El producto AB de matrices está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

Sean $[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$ una fila de A y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ una columna de B , entonces el número

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ es un producto interno de AB .

Si $A = [a_{ij}]$ es una matríz de orden mxn y $B = [b_{ij}]$ una matríz de orden nxp , entonces el producto $C = AB$ es una matríz de orden mxp en la que $[c_{ij}]$ es el producto interno de la $i - \acute{e}sima$ fila de A y $j - \acute{e}sima$ columna de B .

2.2. ALGUNOS TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

2.2.1. Matríz Traspuesta

La matríz traspuesta de una matríz A de orden mxn es la matríz A^T de orden nxm que se obtiene permutando las filas por las columnas.

2.2.2. Matríz Identidad

Los elementos de la diagonal principal de ésta matríz, de orden nxn o cuadrada, son todos 1 y los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a 0. Por ejemplo:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matríz identidad de orden 2

2.2.3. Matríz Inversa

La matríz A^{-1} es matríz inversa de A si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Para hallar A^{-1} se efectúan operaciones sobre las filas de la matríz aumentada $(A|I)$ hasta obtener $(I|A^{-1})$

Las matrices inversas se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

2.3. OPERACIONES FUNDAMENTALES SOBRE LAS FILAS DE UNA MATRÍZ

- Sumar un múltiplo de una fila a otra.
- Multiplicar una fila por una constante distinta de cero.
- Intercambiar dos filas.

2.4. DETERMINANTE DE UNA MATRÍZ CUADRADA

La función determinante asigna un número real a cada matríz cuadrada.

Para matrices de orden $2x2$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Menor

A es una matríz de orden nxn y M_{ij} es la matríz que se obtiene al eliminar de A la $i-ésima\ fila$ y $j-ésima$ columna.

Cofactor

$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$ es un número llamado $ij-ésimo$ cofactor de la matríz A

El determinante de una matríz A de orden nxn , se define como sigue para la primera fila:

$det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

Una matríz tiene inversa si su determinante no es igual a cero.

2.5. RESOLUCIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas se puede expresar y resolver usando matrices.

$A = Matríz\ de\ coeficientes$ $X = Matríz\ de\ incógnitas$ $B = Matríz\ de\ términos\ independientes$

$AX = B$	Sistema de ecuaciones escrito en forma matricial
$A^{-1}AX = A^{-1}B$	Ecuación matricial multiplicada por la inversa de A
$IX = A^{-1}B$	$A^{-1}A = I$
$X = A^{-1}B$	$IX = X$
	Los elementos de la matríz X son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

2.6. REGLA DE CRAMER

La solución de un sistema nxn de ecuaciones lineales se puede obtener así: cada incógnita es igual al determinante que resulta al sustituír en la matríz de coeficientes los coeficientes de la incógnita por la matríz de términos independientes dividido por el determinante de la matríz de coeficientes.

Para un sistema $2x2$ por ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$Matríz\ de\ coeficientes = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad Matríz\ de\ términos\ independientes = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Regla de Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{det(A)} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

2.7. FUNCIONES DEFINIDAS EN EXCEL PARA EL TRABAJO CON MATRICES

2.7.1. MMULT

Devuelve el producto de dos matrices.

Dominio

Conjunto de todos los pares de matrices para las cuales la multiplicación está definida.

Contradominio

Conjunto de matrices que son el producto de dos matrices.

Sintaxis

MMULT(Matríz1,Matríz2)

2.7.2. TRANSPONER

A cada matríz le hace corresponder su matríz traspuesta.

Dominio

Conjunto de todas las matrices.

Contradominio

Conjunto de todas las matrices que son matríz traspuesta.

Sintaxis

TRANSPONER(Matríz)

2.7.3. MDETERM

Calcula el determinante de una matríz cuadrada.

Dominio

Conjunto de todas las matrices cuadradas.

Contradominio

Conjunto de números reales.

Sintaxis

MDETERM(Matríz)

2.7.4. MINVERSA

Halla la matríz inversa de una matríz cuadrada.

Dominio

Conjunto de matrices cuadradas con determinante no igual a cero.

Contradominio

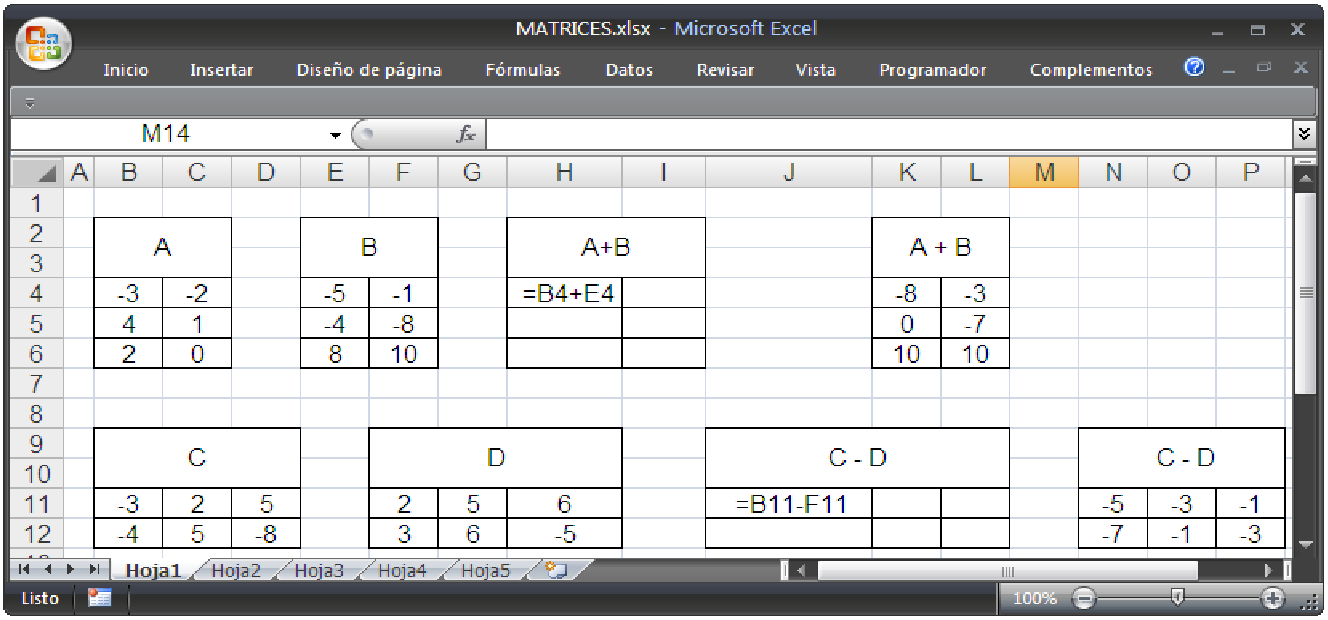
Conjunto de matrices que son matrices inversas.

Sintaxis

MINVERSA(Matríz)

EJEMPLO (Suma y resta de matrices)

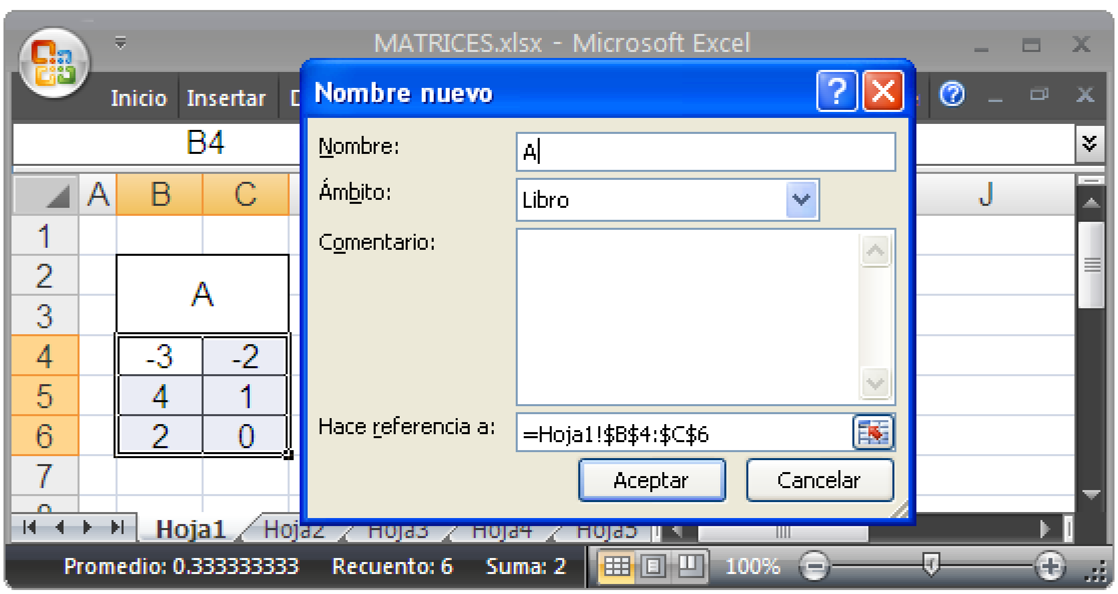
1. Sumando (restando) los elementos correspondientes de las matrices.

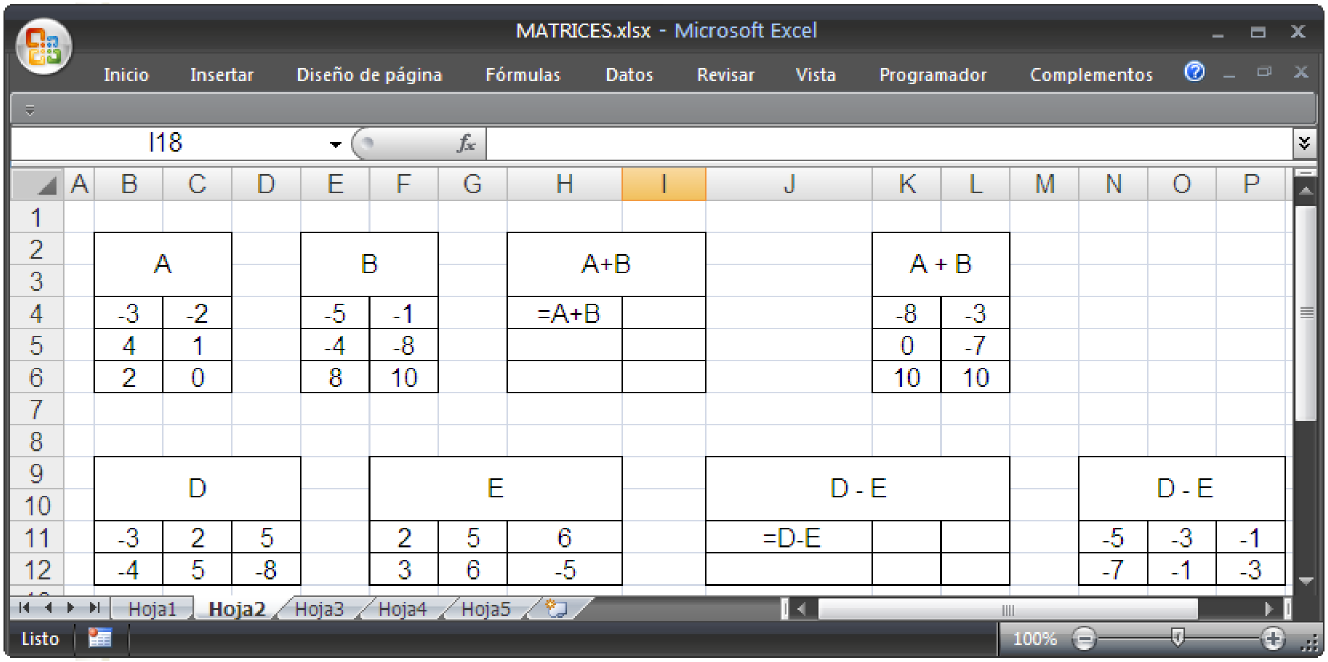


La fórmula escrita en la celda H4 debe ser copiada en las restantes celdas del rango H4:I6. Asimismo la fórmula de la celda J11 en el rango J11:L12 .

2. Asignando los nombres de las matrices a rangos y luego sumando (restando) los rangos.

   Para nombrar un rango se selecciona el rango, clic derecho, asignar nombre a un rango…

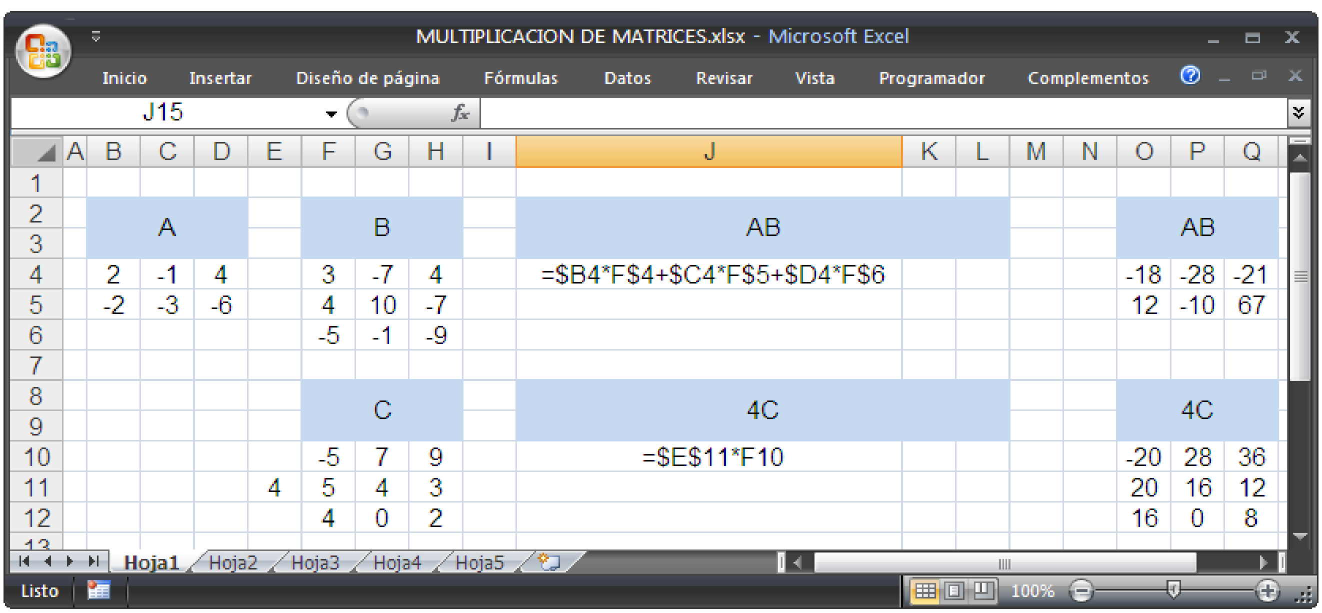




Se selecciona el rango para la matríz suma (diferencia), se escribe la fórmula y luego se presionan simultáneamente las teclas CTRL + SHIFT + ENTER.

<u>EJEMPLO</u> (Multiplicación de un escalar por una matríz, multiplicación de matrices y matríz traspuesta)

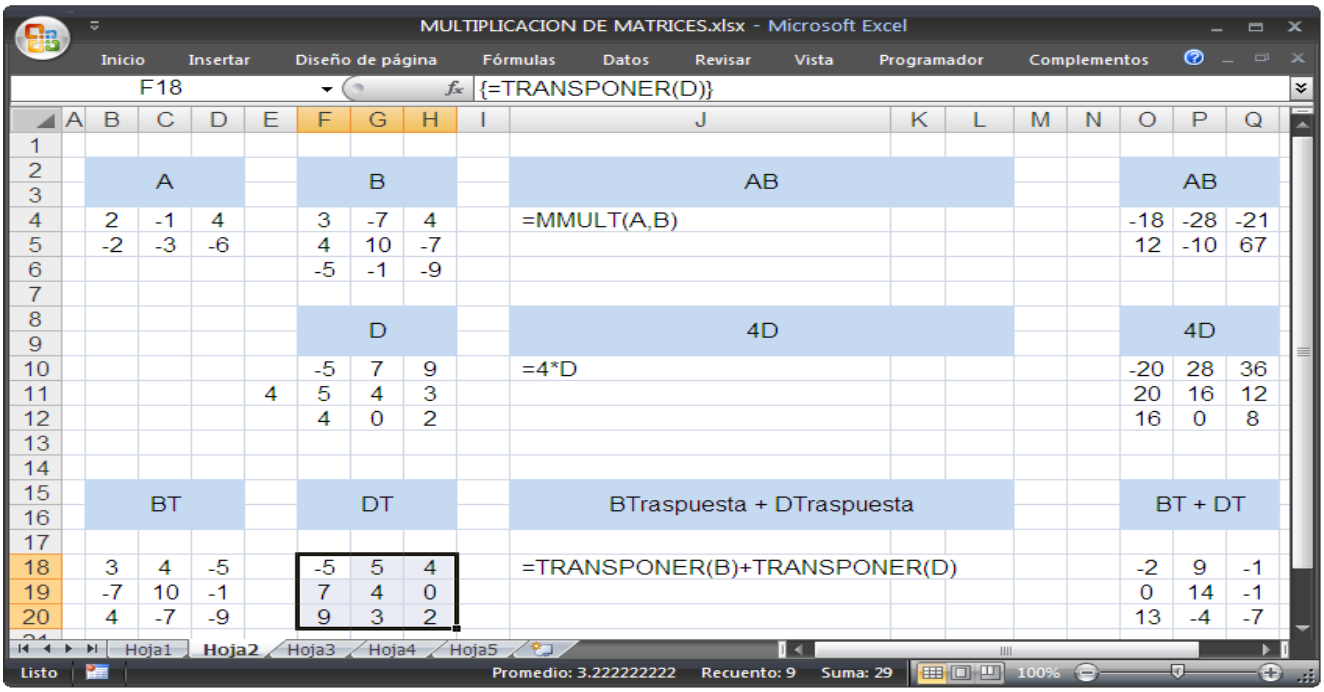
1. Efectuar los productos internos fila – columna. Multiplicar el escalar por cada elemento de la matríz.



En la fórmula para la multiplicación de matrices se utilizan referencias absolutas de celdas puesto que en los productos internos fila – columna, para A las columnas son constantes y las filas variables. Mientras que para B las filas son constantes y las columnas variables.

La fórmula de la celda J4 se debe copiar en el rango J4:L5 y la fórmula de la celda J10 en J10:L12.

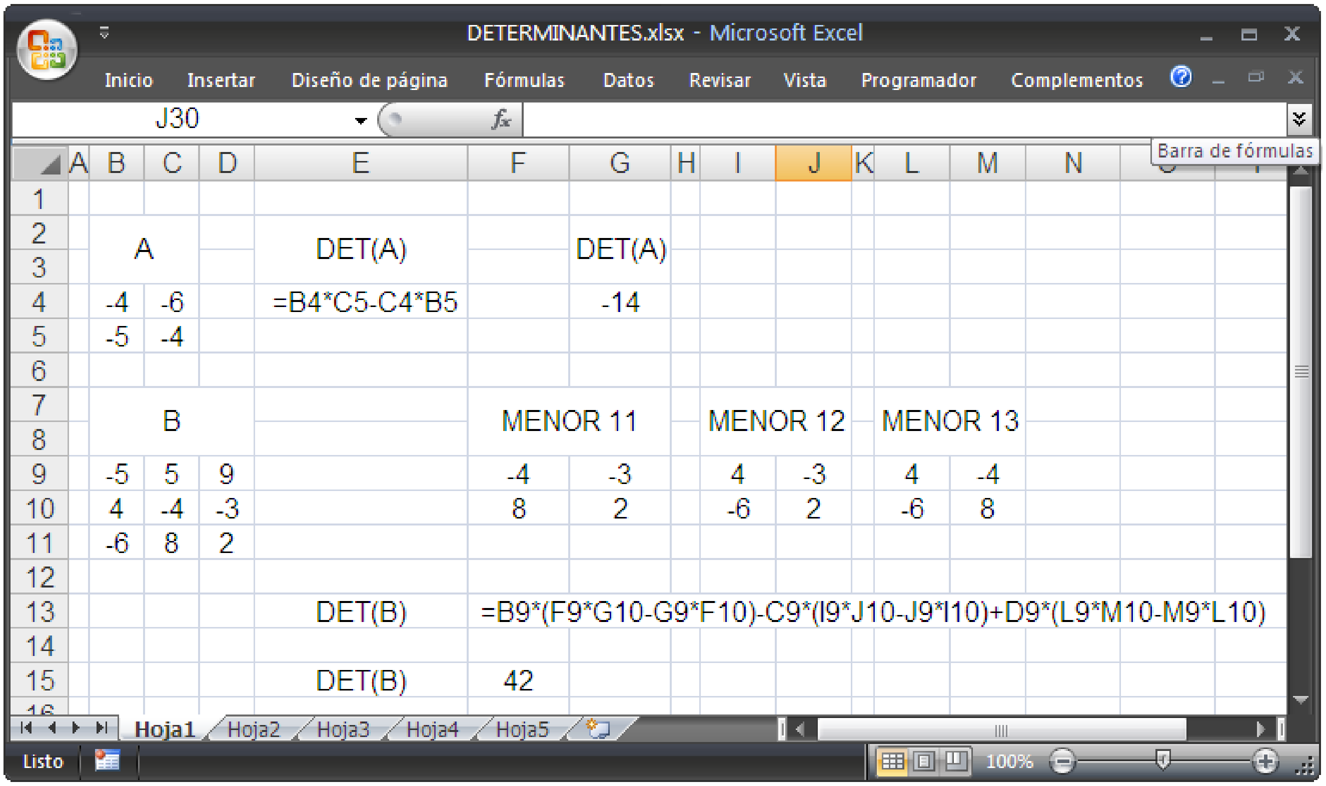
2. Nombrar los rangos de celdas que contienen a las matrices y utilizar las funciones TRANSPONER Y MMULT.



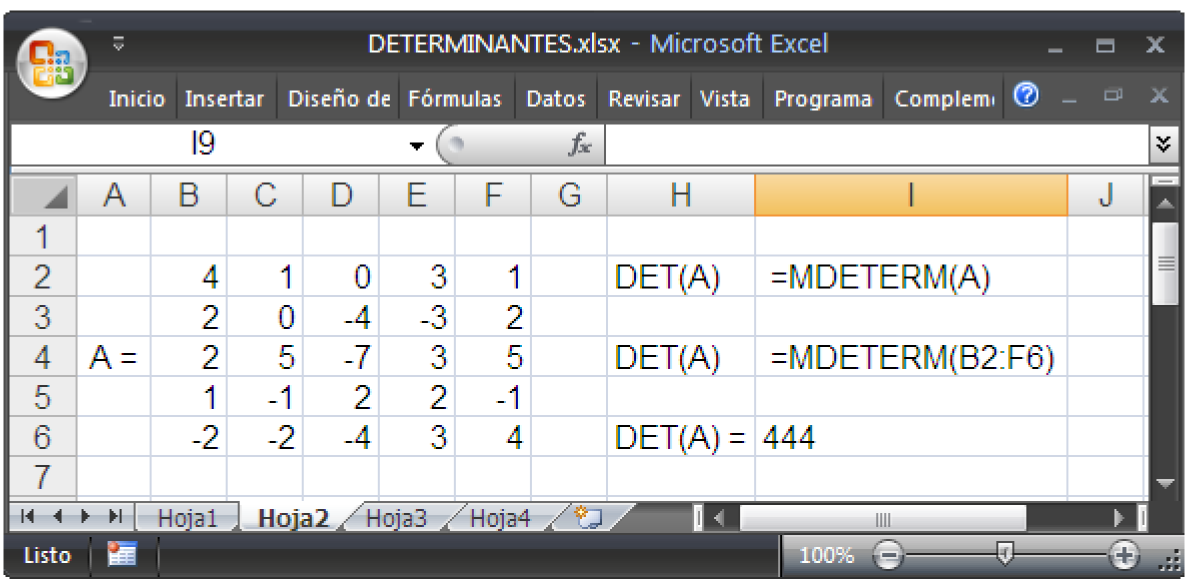
Las fórmulas contenidas en las celdas J4, J10 Y J18 son matriciales por lo que el rango destino debe estar seleccionado y para calcular es necesario presionar simultáneamente CTRL + SHIFT + ENTER.

EJEMPLO (Determinante de una matríz cuadrada)

1. Aplicar el método de cofactores.



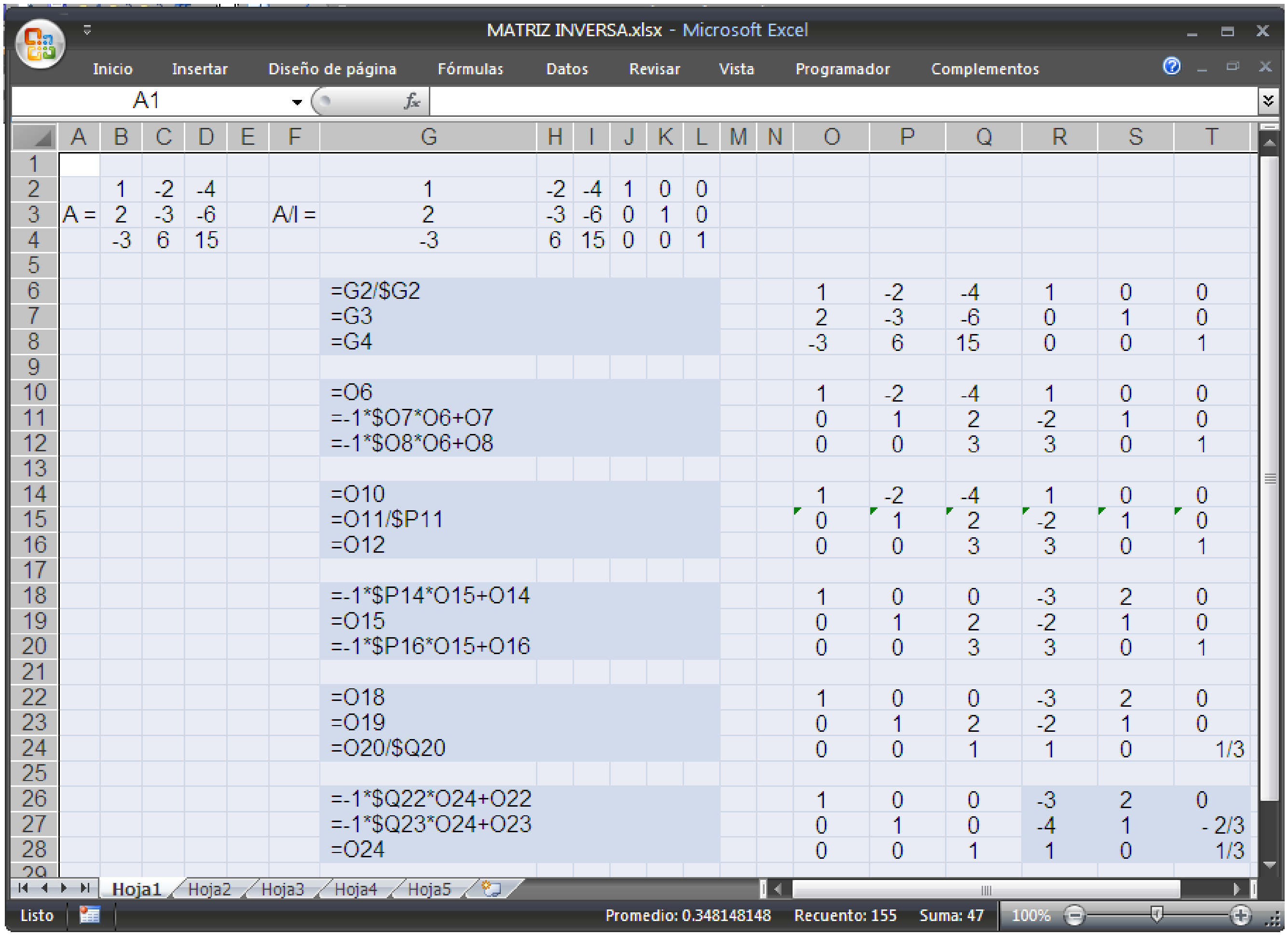
2. Usar la función MDETERM.



El argumento de la función es el rango de celdas que contiene a la matríz o el nombre definido para dicho rango.

<u>EJEMPLO</u> (Inversa de una matríz cuadrada)

1. Efectuar operaciones sobre las filas de la matríz aumentada $(A|I)$ hasta transformarla en $(I|A^{-1})$.

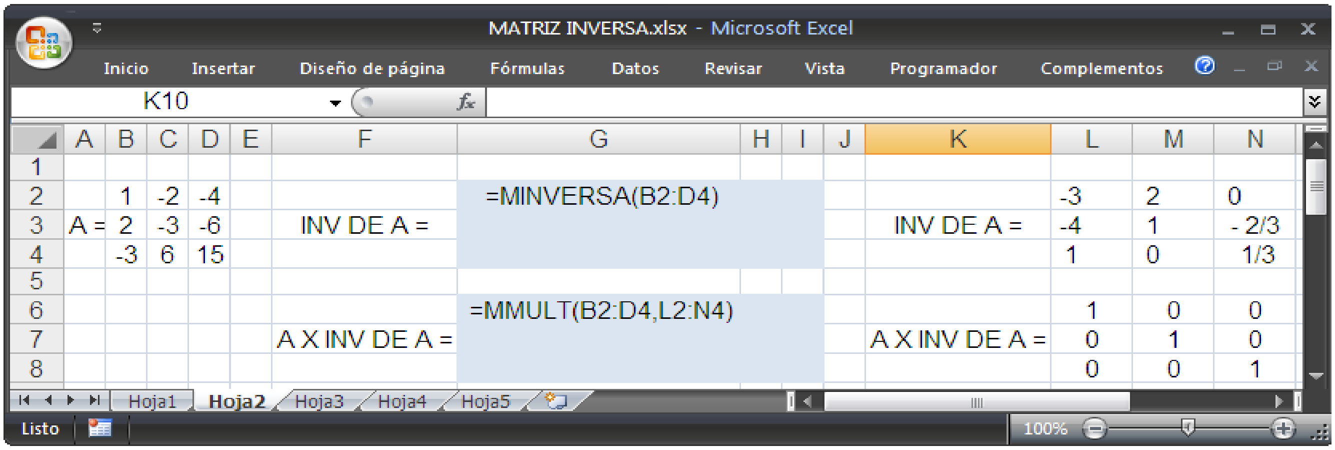


Las fórmulas que se muestran se deben copiar en los rangos fila que están resaltados. La matríz inversa está en el rango R26:T28. Es necesario usar referencias absolutas para el trabajo con constantes.

2. Usar la función MINVERSA.

El ejemplo se aprovecha para mostrar que el producto de una matríz por su matríz inversa es la matríz identidad.

INV DE A significa **matríz inversa de A**.



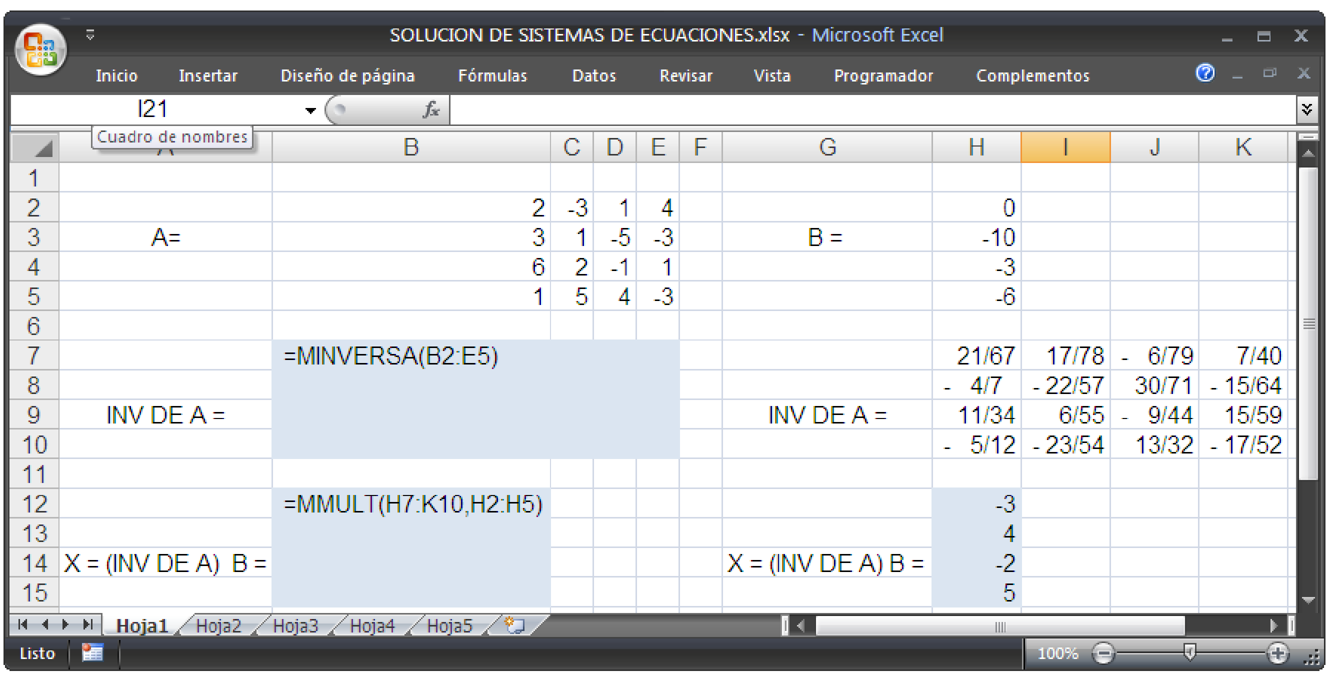
Las fórmulas contenidas en las celdas G2 Y G6 son matriciales. El rango tiene que estar seleccionado antes de escribir la fórmula y luego de escribirla se deben presionar simultáneamente las teclas CTRL + SHIFT + ENTER.

<u>EJEMPLO</u> (Solución de sistemas de ecuaciones lineales)

1. Solución Matricial $X = A^{-1}B$.

El sistema de ecuaciones es:

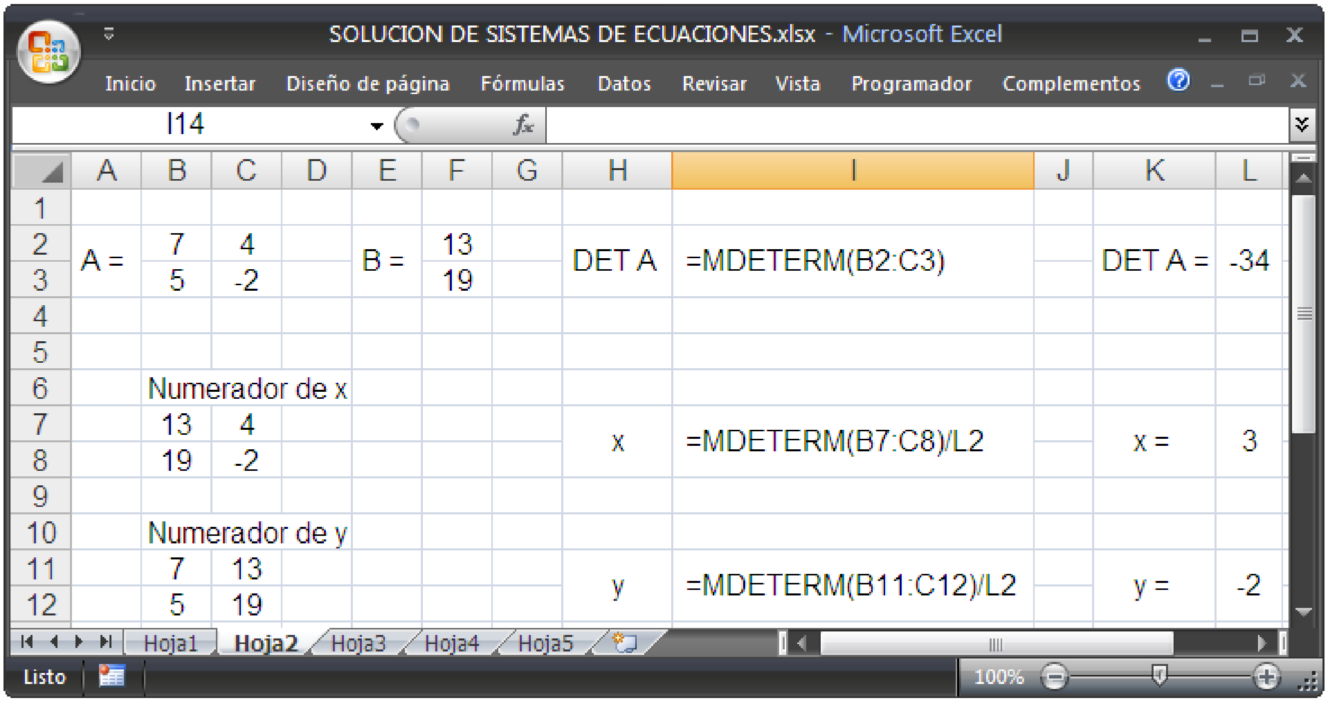
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -10 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -6 \end{cases}$$



Las fórmulas escritas en las celdas B7 y B12 son matriciales, cada rango tiene que estar seleccionado. La solución del sistema de ecuaciones se encuentra en el rango H12:H15.

2. Regla de Cramer.

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$



CAPÍTULO III

3. MATEMÁTICA FINANCIERA

3.1. EL INTERÉS

Es la cantidad de dinero producida por la inversión de un capital a una tasa de interés y durante cierto tiempo.

3.1.1. Interés Simple

El interés es simple cuando no se capitaliza al final de cada unidad de tiempo. El capital es constante durante el tiempo que dura la inversión y el interés que genera en intervalos iguales de tiempo también es constante.

El interés simple es directamente proporcional al capital (c), tasa de interés (i) y tiempo de la inversión (n). De donde

$$Interés\ simple = I_s = cin$$

A la suma del capital con el interés simple se le denomina Monto Simple.

$$S = c + I_s$$

Puesto que el capital y la tasa de interés son constantes, la gráfica que muestra el interés producido para diferentes tiempos es una recta de pendiente ci .

3.1.2. Interés Compuesto

El interés es compuesto si se capitaliza al final de cada unidad de tiempo. El capital y los intereses ganados son crecientes.

Monto compuesto al final del primer periodo de interés	$S = c + ci = c(1 + i)$
Monto compuesto al final del segundo periodo de interés	$S = c(1 + i) + c(1 + i)i = c(1 + i)(1 + i) = c(1 + i)^2$
Monto compuesto al final del $n - ésimo$ periodo de interés	$S = c(1 + i)^n$

Entonces el interés compuesto se calcula usando la ecuación

$$I_c = S - c = c(1 + i)^n - c = c[(1 + i)^n - 1]$$

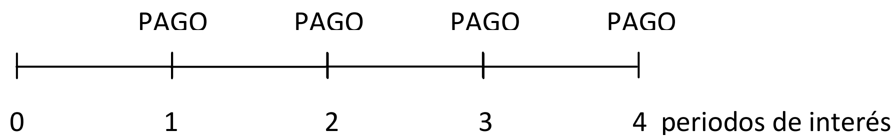
El interés compuesto como función del tiempo es una función exponencial creciente.

3.2. ANUALIDADES

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo.

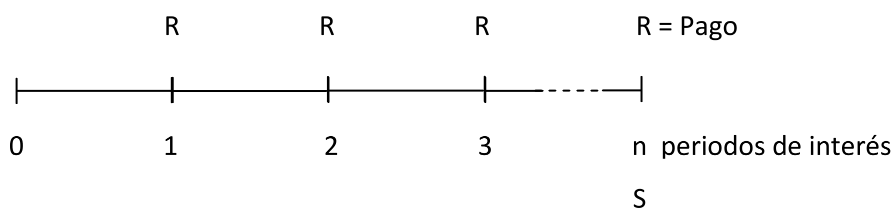
3.2.1. ANUALIDADES VENCIDAS

Los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago.



Monto de una anualidad

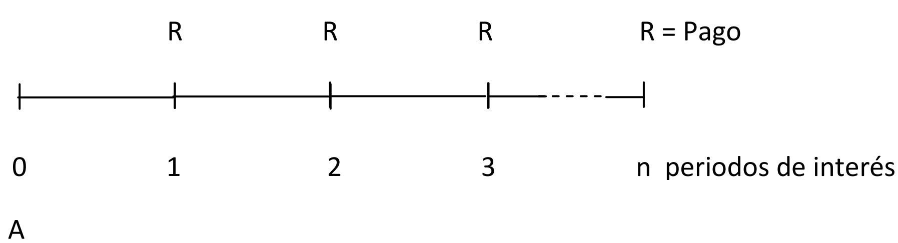
Es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo de la anualidad.



$$Monto\ de\ la\ anualidad = S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Valor actual o presente de una anualidad

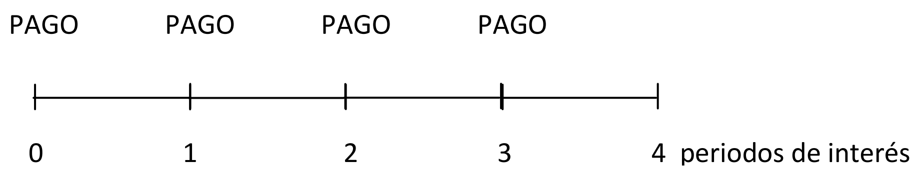
Es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo de la anualidad.



$$Valor\ presente\ de\ la\ anualidad = A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

3.2.2. ANUALIDADES ANTICIPADAS

Los pagos se realizan al inicio de cada intervalo de pago o interés.



El monto de una anualidad anticipada de n pagos es igual al monto de una vencida de $n+1$ pagos justo antes del pago $n+1$. Por ello

$$S = R\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - R$$

El valor presente de una anualidad anticipada de n pagos es igual al primer pago más el valor presente de una anualidad vencida de $n-1$ pagos. Al primer pago no se le aplica el factor de descuento puesto que se hace efectivo en la fecha de pago.

$$A = R + R\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

3.3. FUNCIONES DEFINIDAS EN EXCEL PARA MATEMÁTICA FINANCIERA

3.3.1. VA

Calcula el valor actual de una anualidad anticipada o vencida.

Dominio

Conjunto de números enteros positivos. Cada elemento representa el número de períodos de interés de la anualidad.

Contradominio

Conjunto de números reales positivos.

Sintaxis

VA(tasa,nper,pago,[vf],[tipo])

Los parámetros **vf** y **tipo** son opcionales. En anualidades anticipadas **tipo = 1** y para vencidas **tipo = 0.**

3.3.2. VF

Devuelve el monto de una anualidad anticipada o vencida.

Dominio

Conjunto de números enteros positivos.

Contradominio

Conjunto de números reales positivos.

Sintaxis

VF(tasa,nper,pago,[va],[tipo])

3.3.3. NPER

Determina el número de pagos de una anualidad anticipada o vencida.

Sintaxis

NPER(tasa,pago,va,[vf],[tipo])

3.3.4. PAGO

La imagen de la función es el pago períodico y constante de la anualidad.

Sintaxis

PAGO(tasa,nper,va, [vf],[tipo])

3.3.5. TASA

Es la tasa de interés por periodo de pago.

Sintaxis

TASA(nper,pago,va, [vf],[tipo])

3.3.6. PAGOINT

Determina la parte de un pago destinada a la cancelación de intereses.

Sintaxis

PAGOINT(tasa,período,nper,va, [vf],[tipo])

3.3.7. PAGOPRIN

Calcula la parte de un pago utilizada para la amortización del capital.

Sintaxis

PAGOPRIN(tasa,período,nper,va, [vf],[tipo])

3.3.8. POTENCIA

Es la función exponencial de base a .

Dominio

Conjunto de números reales.

Rango

Conjunto de números reales positivos.

Sintaxis

POTENCIA(número,potencia)

3.3.9. LOG10

Función logarítmica de base 10.

Dominio

Conjunto de números reales positivos.

Contradominio

Conjunto de los números reales

Sintaxis

LOG10(número)

3.3.10. REDONDEAR

Redondea un número al número de decimales que se especifique.

Sintaxis

REDONDEAR(número,núm_decimales)

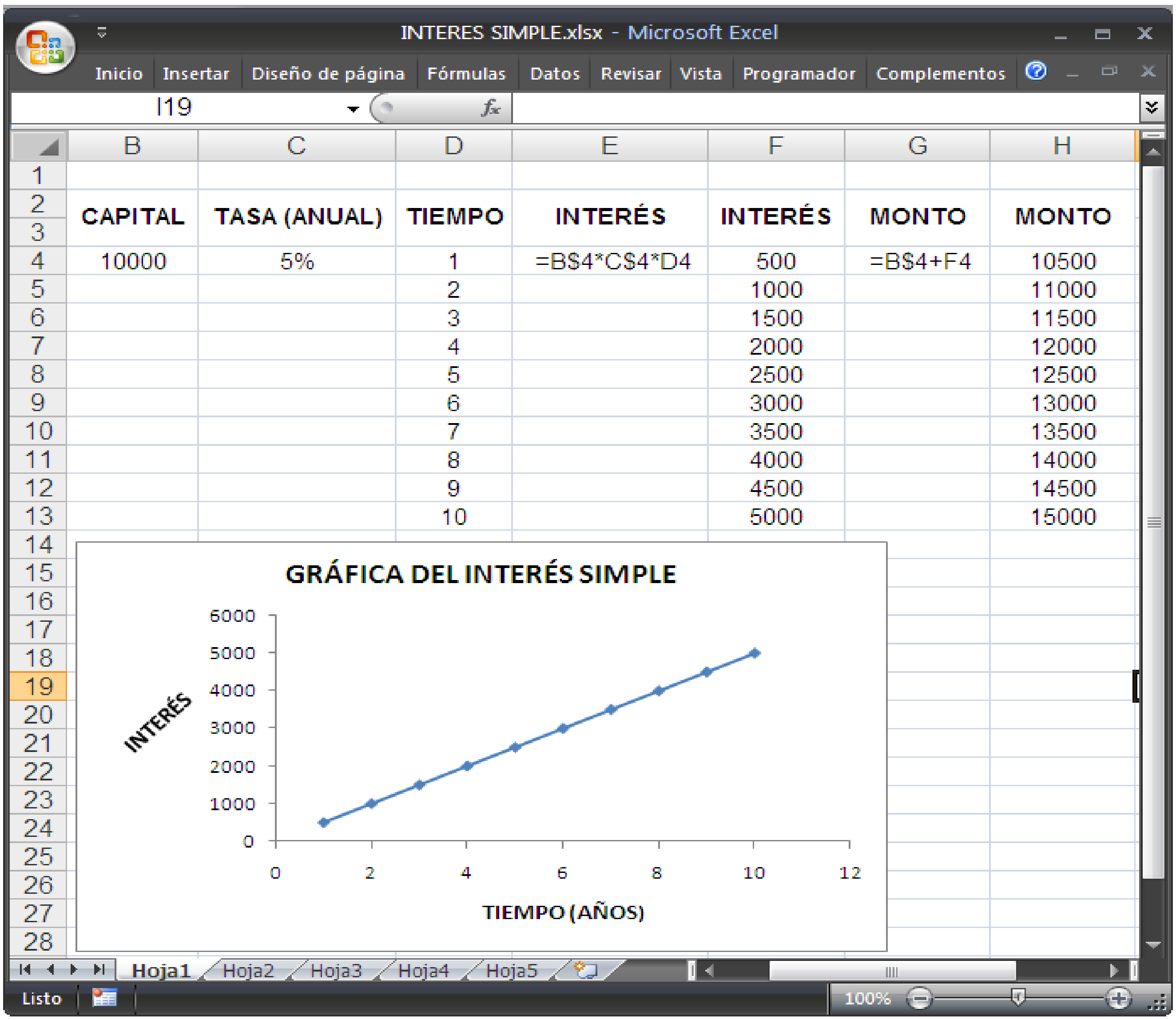
3.3.11. <u>SUMA</u>

Suma los números contenidos en el rango de celdas.

<u>Sintaxis</u>

SUMA(rango)

<u>EJEMPLO</u> (Interés Simple)

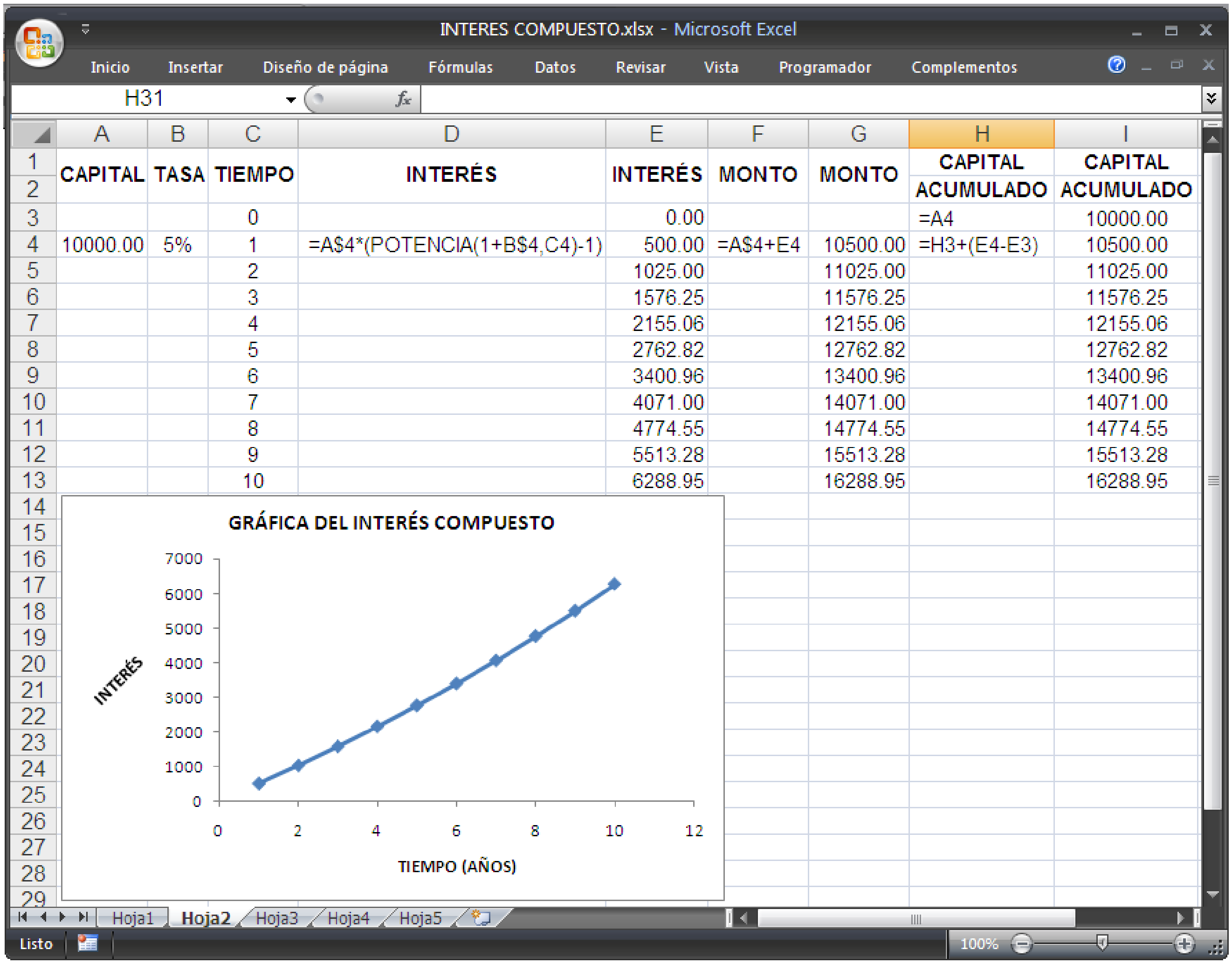


	B	C	D	E	F	G	H
1							
2-3	CAPITAL	TASA (ANUAL)	TIEMPO	INTERÉS	INTERÉS	MONTO	MONTO
4	10000	5%	1	=B$4*C$4*D4	500	=B$4+F4	10500
5			2		1000		11000
6			3		1500		11500
7			4		2000		12000
8			5		2500		12500
9			6		3000		13000
10			7		3500		13500
11			8		4000		14000
12			9		4500		14500
13			10		5000		15000

Las fórmulas contenidas en las celdas E4 Y G4 se deben copiar en los rangos E5:E13 y G5:G13. La pendiente de la recta **tiempo-interés** es el producto ci ($capital \cdot tasa$). El capital e interés anual son constantes.

Para graficar se selecciona los rangos de celdas D4:D13 y F4:F13, se muestra la barra de herramientas **INSERTAR** y se selecciona en la barra **GRÁFICOS** el tipo **DISPERSIÓN**.

EJEMPLO (Interés Compuesto)



CAPITAL	TASA	TIEMPO	INTERÉS	INTERÉS	MONTO	MONTO	CAPITAL ACUMULADO	CAPITAL ACUMULADO
		0		0.00			=A4	10000.00
10000.00	5%	1	=A$4*(POTENCIA(1+B$4,C4)-1)	500.00	=A$4+E4	10500.00	=H3+(E4-E3)	10500.00
		2		1025.00		11025.00		11025.00
		3		1576.25		11576.25		11576.25
		4		2155.06		12155.06		12155.06
		5		2762.82		12762.82		12762.82
		6		3400.96		13400.96		13400.96
		7		4071.00		14071.00		14071.00
		8		4774.55		14774.55		14774.55
		9		5513.28		15513.28		15513.28
		10		6288.95		16288.95		16288.95

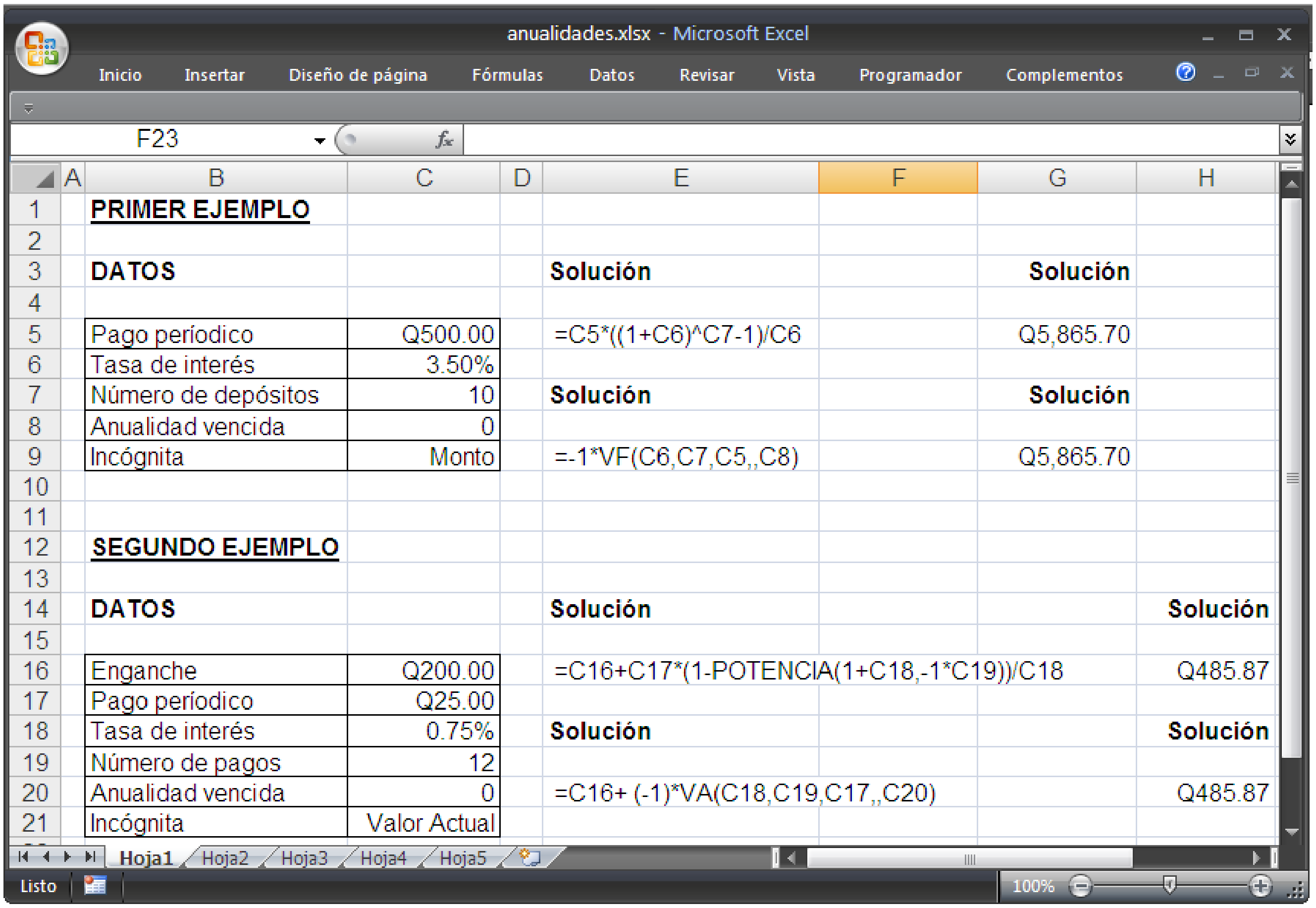
Es necesario copiar las fórmulas de las celdas D4, F4 y H4.

La función es exponencial de base $1+i$. El capital e interés anual son crecientes.

EJEMPLOS (Monto y Valor Actual de una anualidad vencida)

1. Se han depositado Q 500.00 al final de cada año en una cuenta de ahorro que paga el 3 ½% efectivo. ¿ Cuánto hay en la cuenta inmediatamente después de hacer el décimo depósito ?

2. Una tienda tiene en oferta un televisor con Q 200.00 de cuota inicial y Q 25.00 mensuales por los próximos 12 meses. Si se carga un interés de 9% convertible mensualmente, ¿ cuál es el valor de contado del televisor ?



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**PRIMER EJEMPLO**						
2								
3		**DATOS**			**Solución**		**Solución**	
4								
5		Pago períodico	Q500.00		=C5*((1+C6)^C7-1)/C6		Q5,865.70	
6		Tasa de interés	3.50%					
7		Número de depósitos	10		**Solución**		**Solución**	
8		Anualidad vencida	0					
9		Incógnita	Monto		=-1*VF(C6,C7,C5,,C8)		Q5,865.70	
10								
11								
12		**SEGUNDO EJEMPLO**						
13								
14		**DATOS**			**Solución**			**Solución**
15								
16		Enganche	Q200.00		=C16+C17*(1-POTENCIA(1+C18,-1*C19))/C18			Q485.87
17		Pago períodico	Q25.00					
18		Tasa de interés	0.75%		**Solución**			**Solución**
19		Número de pagos	12					
20		Anualidad vencida	0		=C16+ (-1)*VA(C18,C19,C17,,C20)			Q485.87
21		Incógnita	Valor Actual					

En el primer ejemplo inmediatamente despúes de efectuar el décimo depósito, en la cuenta estarán los 10 depósitos de Q 500.00 más los intereses que cada uno ha ganado. Se trata entonces de encontrar el monto de una anualidad vencida.

En el segundo ejemplo el valor de contado del televisor es igual al enganche más la suma de los 12 pagos mensuales descontados cada uno según su fecha de vencimiento. El número de pagos anuales coincide con el número de capitalizaciones anuales, sólo es necesario dividir la tasa nominal entre el número de capitalizaciones en el año.

<u>EJEMPLOS</u> (Pago períodico y número de pagos)

1. ¿ Qué cantidad de dinero se debe depositar semestralmente en una cuenta que paga 3 ½% capitalizable semestralmente, durante 10 años para que el monto sea de Q 25000.00, precisamente después del último depósito ?

   <u>Pago períodico</u>

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \rightarrow \quad R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1}$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \rightarrow \quad R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

2. Para acumular Q 5000.00 se hacen depósitos de Q 250.00 cada 3 meses. Si el fondo gana 4% capitalizable trimestralmente, ¿ cuántos depósitos de Q 250.00 son necesarios y cuál es el importe del depósito requerido 3 meses más tarde ?

Número de pagos

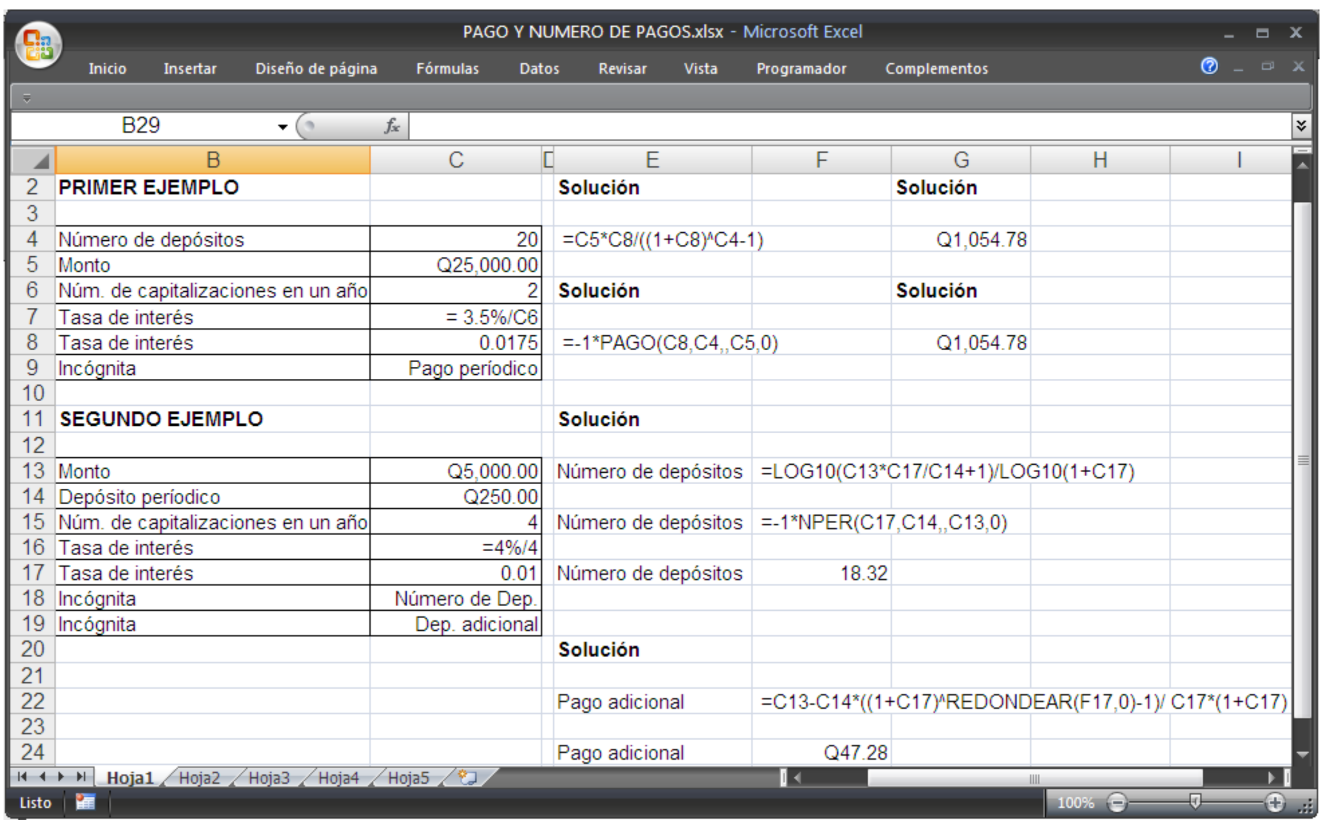
$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \rightarrow \quad (1+i)^n = \frac{Si}{R} + 1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{Log\left(\frac{Si}{R} + 1\right)}{Log(1+i)}$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \rightarrow \quad -(1+i)^{-n} = \frac{Ai}{R} - 1 \quad \rightarrow \quad n = -\frac{Log\left(1 - \frac{Ai}{R}\right)}{Log(1+i)}$$

Pago adicional

x es el importe del pago adicional. La suma de dicho pago y el monto de una anualidad de 18 pagos con intereses por un período es igual a los Q 5000.00 que se desea acumular, tal como muestran los cálculos en la hoja electrónica siguiente.

$$x + R\frac{(1+i)^{18} - 1}{i}(1+i) = S \quad \rightarrow \quad x = S - R\frac{(1+i)^{18} - 1}{i(1+i)}$$



	B	C	E	F	G
2	**PRIMER EJEMPLO**		**Solución**		**Solución**
3					
4	Número de depósitos	20	=C5*C8/((1+C8)^C4-1)		Q1,054.78
5	Monto	Q25,000.00			
6	Núm. de capitalizaciones en un año	2	**Solución**		**Solución**
7	Tasa de interés	= 3.5%/C6			
8	Tasa de interés	0.0175	=-1*PAGO(C8,C4,,C5,0)		Q1,054.78
9	Incógnita	Pago períodico			
10					
11	**SEGUNDO EJEMPLO**		**Solución**		
12					
13	Monto	Q5,000.00	Número de depósitos	=LOG10(C13*C17/C14+1)/LOG10(1+C17)	
14	Depósito períodico	Q250.00			
15	Núm. de capitalizaciones en un año	4	Número de depósitos	=-1*NPER(C17,C14,,C13,0)	
16	Tasa de interés	=4%/4			
17	Tasa de interés	0.01	Número de depósitos	18.32	
18	Incógnita	Número de Dep.			
19	Incógnita	Dep. adicional			
20			**Solución**		
21					
22			Pago adicional	=C13-C14*((1+C17)^REDONDEAR(F17,0)-1)/ C17*(1+C17)	
23					
24			Pago adicional	Q47.28	

EJEMPLO (Tabla de amortización de una deuda)

Una deuda de Q 5000.00 más intereses del 5% capitalizable semestralmente, será amortizada mediante 6 pagos semestrales. Construír la tabla de amortización de las obligaciones contraídas.

PAGO Y NUMERO DE PAGOS.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1		DATOS			P = PERÍODO	
2		VALOR ACTUAL	Q5,000.00			
3		TASA DE INTERÉS	0.025			
4		NÚMERO DE PAGOS	6			
5		PAGO	=C2*C3/(1-POTENCIA(1+C3,-1*C4))			
6		PAGO	=-1*PAGO(C3,C4,C2,,0)			
7		PAGO	Q907.75			
8						
9						
10	P	PAGOS QUE FALTAN	CAPITAL NO PAGADO	INTERÉS VENCIDO AL	PAGO	CAPITAL PAGADO AL
11		AL INICIO DEL PERÍODO	AL INICIO DEL PERÍODO	FINAL DEL PERÍODO		FINAL DEL PERÍODO
12						
13	1	6	=C$7*(1-POTENCIA(1+C$3,-1*B13))/C$3	=C13*C$3	=C$7	=E13-D13
14	2	5				
15						
16						
17	P	PAGOS QUE FALTAN AL	CAPITAL NO PAGADO	INTERÉS VENCIDO AL	PAGO	CAPITAL PAGADO AL
18		AL INICIO DEL PERÍODO	AL INICIO DEL PERÍODO	FINAL DEL PERÍODO		FINAL DEL PERÍODO
19						
20	1	6	=-1*VA(C$3,B20,C$7,,0)	=-1*PAGOINT(C$3,A20,C$4,C$2,,0)	=C$7	=-1*PAGOPRIN(C$3,A20,C$4,C$2,,0)
21	2	5				
22		4				
23						
24	P	PAGOS QUE FALTAN	CAPITAL NO PAGADO	INTERÉS VENCIDO AL	PAGO	CAPITAL PAGADO AL
25		AL INICIO DEL PERÍODO	AL INICIO DEL PERÍODO	FINAL DEL PERÍODO		FINAL DEL PERÍODO
26						
27	1	6	Q5,000.00	Q125.00	Q907.75	Q782.75
28	2	5	Q4,217.25	Q105.43	Q907.75	Q802.32
29	3	4	Q3,414.93	Q85.37	Q907.75	Q822.38
30	4	3	Q2,592.55	Q64.81	Q907.75	Q842.94
31	5	2	Q1,749.62	Q43.74	Q907.75	Q864.01
32	6	1	Q885.61	Q22.14	Q907.75	Q885.61
33						
34			SUMAS	=SUMA(D27:D32)	Q5,446.50	=SUMA(F27:F32)
35			SUMAS	Q446.50	Q5,446.50	Q5,000.00

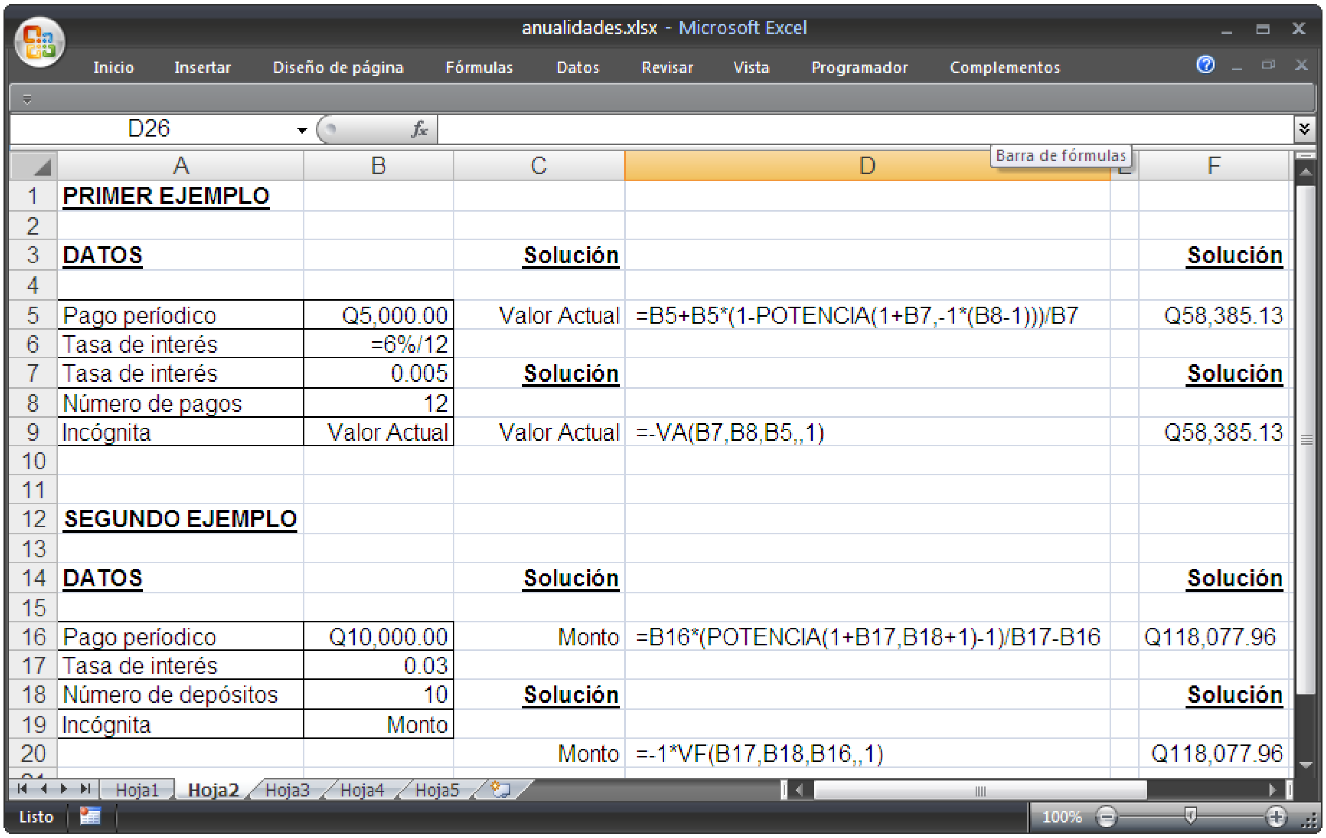
El capital no pagado es el valor actual de los pagos no efectuados al inicio del período. Para calcular la parte del pago períodico destinada a la cancelación de intereses se ha aplicado la ecuación del interés simple con $n = 1$.

El cuadro muestra los cálculos usando las ecuaciones de anualidades y también con funciones financieras de EXCEL.

EJEMPLOS (Anualidades anticipadas)

1. La renta mensual de un edificio es Q 5000.00 pagados por anticipado. ¿ Cuál es la renta anual anticipada equivalente al 6% convertible mensualmente ?

2. Un empresario depósita Q 10000.00 al inicio de cada año para constituír un fondo para futuras ampliaciones. El fondo gana 3%, ¿ cuál es el monto al final del décimo año ?



	A	B	C	D	F
1	**PRIMER EJEMPLO**				
2					
3	**DATOS**		**Solución**		**Solución**
4					
5	Pago períodico	Q5,000.00	Valor Actual	=B5+B5*(1-POTENCIA(1+B7,-1*(B8-1)))/B7	Q58,385.13
6	Tasa de interés	=6%/12			
7	Tasa de interés	0.005	**Solución**		**Solución**
8	Número de pagos	12			
9	Incógnita	Valor Actual	Valor Actual	=-VA(B7,B8,B5,,1)	Q58,385.13
10					
11					
12	**SEGUNDO EJEMPLO**				
13					
14	**DATOS**		**Solución**		**Solución**
15					
16	Pago períodico	Q10,000.00	Monto	=B16*(POTENCIA(1+B17,B18+1)-1)/B17-B16	Q118,077.96
17	Tasa de interés	0.03			
18	Número de depósitos	10	**Solución**		**Solución**
19	Incógnita	Monto			
20			Monto	=-1*VF(B17,B18,B16,,1)	Q118,077.96

En el primer ejemplo el primer pago se realiza en la fecha de vencimiento por lo que no tiene descuento. Luego hay que encontrar el valor actual de una anualidad vencida de 11 pagos.

En el segundo ejemplo se calcula el monto de una anualidad de 11 pagos. El último se debe restar.

En las funciones financieras **VA** y **VF** el parámetro **tipo = 1**, puesto que las anualidades son anticipadas.

CAPÍTULO IV

4. LÓGICA MATEMÁTICA

La Lógica estudia métodos de razonamiento. Se aplica para determinar la validez de razonamientos. La demostración de teoremas matemáticos requiere de razonamientos correctos.

4.1. PROPOSICIÓN

Es cualquier enunciado verdadero o falso. Se representa simbólicamente usando las letras $p, q, r, s, t, u,$ etc.

Los posibles valores de verdad de una proposición son ***verdadero*** y ***falso.*** Las proposiciones pueden combinarse para formar proposiciones compuestas $P(p, q, r, \dots)$, mediante partículas del lenguaje llamadas conectivos lógicos.

4.2. CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS

4.2.1. Conjunción

Es una proposición compuesta de la forma $p \ y \ q$ o $p \bigwedge q$. La conjunción es verdadera cuando las proposiciones simples que la forman son verdaderas.

4.2.2. Disyunción Inclusiva

Ésta proposición compuesta tiene la forma $p \ \frac{y}{o} \ q$ o $p \vee q$. Es falsa cuando las proposiciones p y q son falsas.

4.2.3. Condicional

Se llama así a la proposición compuesta $Si \ p \ entonces \ q$ o $p \rightarrow q$. Es falsa cuando la hipótesis p es verdadera y la conclusión q falsa.

4.2.4. Bicondicional

Proposición compuesta de forma $p \ si \ y \ sólo \ si \ q$ o $p \leftrightarrow q$. Es verdadera cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

4.3. NEGACIÓN DE UNA PROPOSICIÓN

La negación de una proposición verdadera es falsa y la negación de una proposición falsa es verdadera. La negación de la proposición p se representa con $\sim p$ **.**

4.4. TAUTOLOGÍA

Proposición compuesta siempre verdadera independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

4.5. CONTRADICCIÓN

Proposición compuesta siempre falsa independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

4.6. EQUIVALENCIA LÓGICA

Dos proposiciones compuestas $P(p,q,r,\dots)$ y $Q(p,q,r,\dots)$ son lógicamente equivalentes si la proposición $P(p,q,r,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ es una tautología. Sus tablas de verdad son iguales.

La equivalencia lógica se expresa $\boldsymbol{P(p,q,r,\dots) \equiv Q(p,q,r,\dots)}$

4.7. IMPLICACIÓN LÓGICA

La proposición $P(p,q,r,\dots)$ implica lógicamente la proposición $Q(p,q,r,\dots)$ si cuando P es verdadera Q también lo es.

La implicación se expresa $\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$ y la proposición $P \rightarrow Q$ es una tautología.

4.8. ARGUMENTO LÓGICO

Es la afirmación de que un conjunto de proposiciones $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n}$, llamadas ***premisas***, producen otra proposición $\boldsymbol{Q}$, llamada ***conclusión***.

Un argumento se representa como sigue: $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n \dashv Q}$

Es verdadero si la conclusión es verdadera cuando todas las premisas son verdaderas, de lo contrario es falso.

Un argumento verdadero se denomina ***válido*** y un argumento falso es una **falacia**.

El argumento $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n \dashv Q}$ es válido si la conjunción de las premisas implica lógicamente la conclusión, es decir que la proposición $\boldsymbol{(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n) \rightarrow Q}$ es una tautología.

4.9. FUNCIONES DEFINIDAS EN EXCEL PARA LÓGICA MATEMÁTICA

4.9.1. O

Proporciona el valor de verdad de una disyunción inclusiva.

Dominio

Conjunto de todas las proposiciones.

Contradominio

Conjunto de los posibles valores de verdad de una proposición (verdadero y falso).

Sintaxis

O(ExpresiónLogica1,ExpresiónLógica2,…)

Las expresiones lógicas pueden estar contenidas en algún rango de celdas.

4.9.2. Y

Determina el valor de verdad de una conjución.

Sintaxis

Y(ExpresiónLogica1,ExpresiónLógica2,…)

4.9.3. NO

Determina el valor de verdad de la negación de una proposición.

Sintaxis

NO(ExpresiónLógica)

4.9.4. SI

Dependiendo del valor de verdad de una expresión lógica, ejecuta una acción u otra.

Sintaxis

SI(ExpresiónLógica,Acción1,Acción2)

Realiza la Acción1 si la ExpresiónLógica es verdadera, de lo contrario la Accion2.

4.9.5. VERDADERO

Devuelve el valor lógico **verdadero**.

Sintaxis

VERDADERO()

4.9.6. FALSO

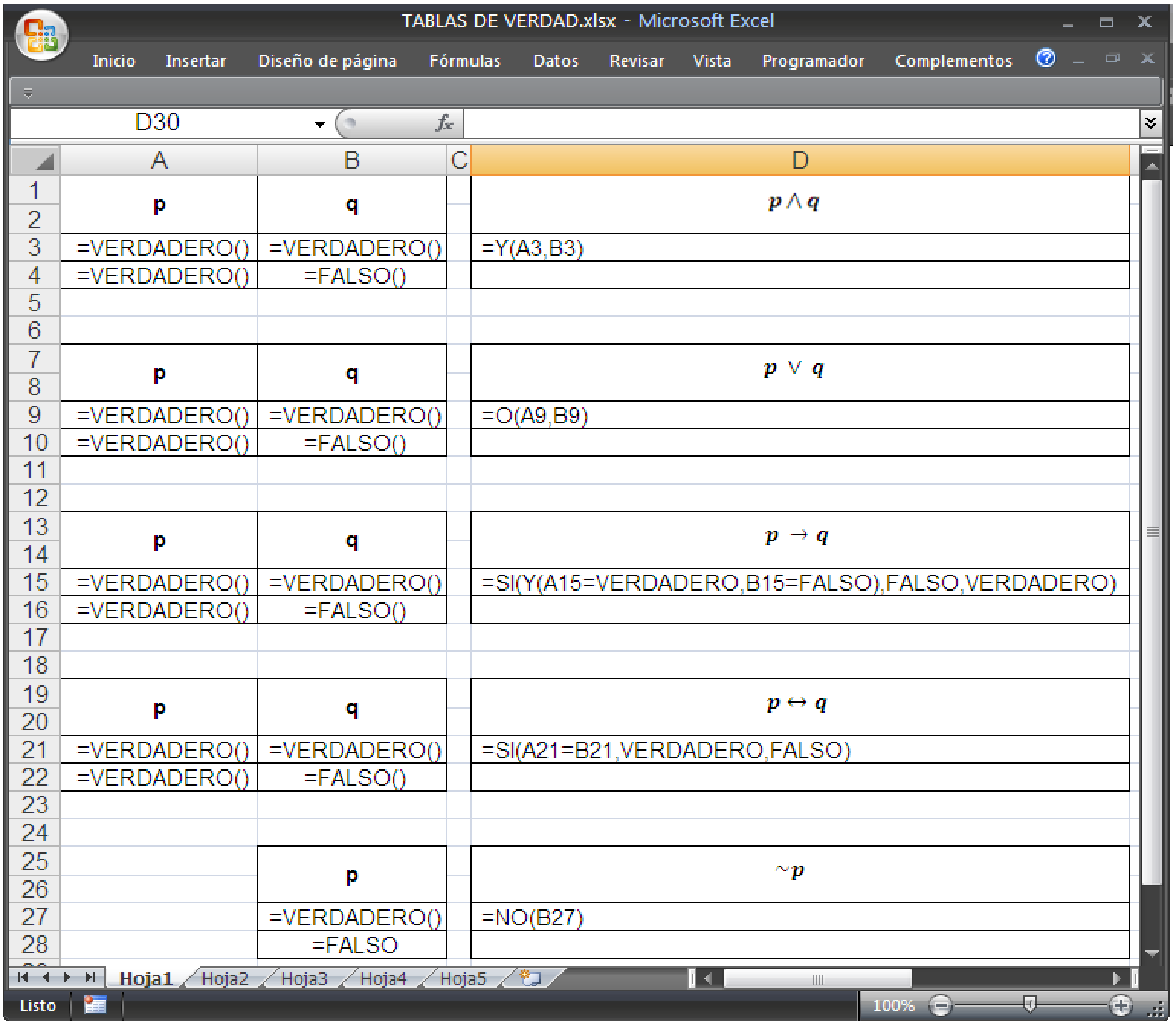
Devuelve el valor lógico **falso**.

Sintaxis

FALSO()

EJEMPLO (Tablas de verdad de las proposiciones compuestas)

La primera hoja muestra las fórmulas lógicas para la conjunción, disyunción inclusiva, condicional, bicondicional y negación de una proposición. La segunda hoja presenta las respectivas tablas de verdad.



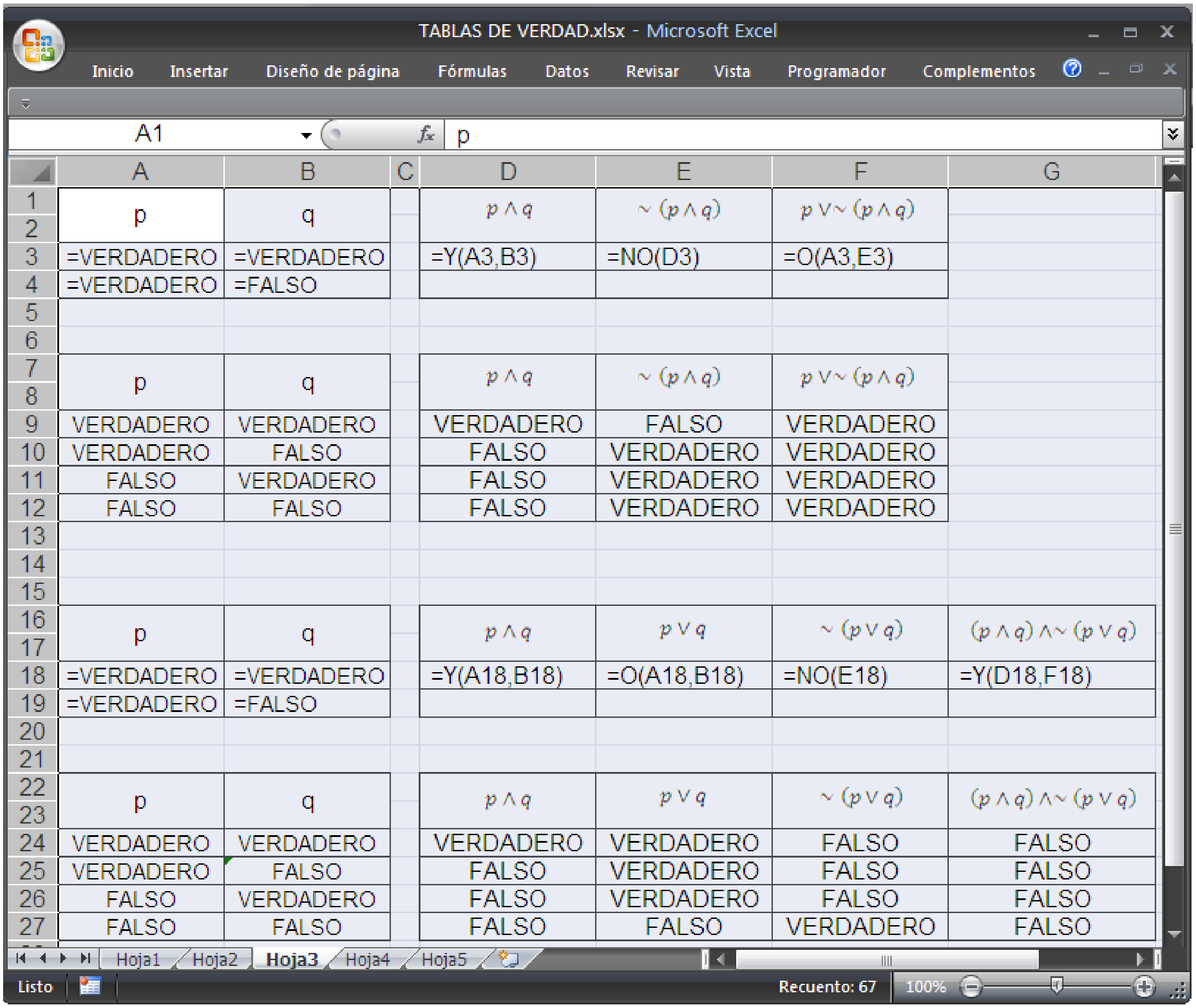
	A	B	C	D
1–2	**p**	**q**		$p \wedge q$
3	=VERDADERO()	=VERDADERO()		=Y(A3,B3)
4	=VERDADERO()	=FALSO()		
5				
6				
7–8	**p**	**q**		$p \vee q$
9	=VERDADERO()	=VERDADERO()		=O(A9,B9)
10	=VERDADERO()	=FALSO()		
11				
12				
13–14	**p**	**q**		$p \rightarrow q$
15	=VERDADERO()	=VERDADERO()		=SI(Y(A15=VERDADERO,B15=FALSO),FALSO,VERDADERO)
16	=VERDADERO()	=FALSO()		
17				
18				
19–20	**p**	**q**		$p \leftrightarrow q$
21	=VERDADERO()	=VERDADERO()		=SI(A21=B21,VERDADERO,FALSO)
22	=VERDADERO()	=FALSO()		
23				
24				
25–26		**p**		$\sim p$
27		=VERDADERO()		=NO(B27)
28		=FALSO		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1–2	p	q		$p \wedge q$		$p \vee q$		$p \to q$		$p \leftrightarrow q$		$\sim p$
3	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO
4	VERDADERO	FALSO		FALSO		VERDADERO		FALSO		FALSO		
5	FALSO	VERDADERO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO		FALSO		VERDADERO
6	FALSO	FALSO		FALSO		FALSO		VERDADERO		VERDADERO		

<u>EJEMPLO</u> (Tautología y Contradicción)

1. Demostrar que la proposición $p \bigvee \sim (p \wedge q)$ es una tautología.

2. Demostrar que la proposición $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ es una contradicción.



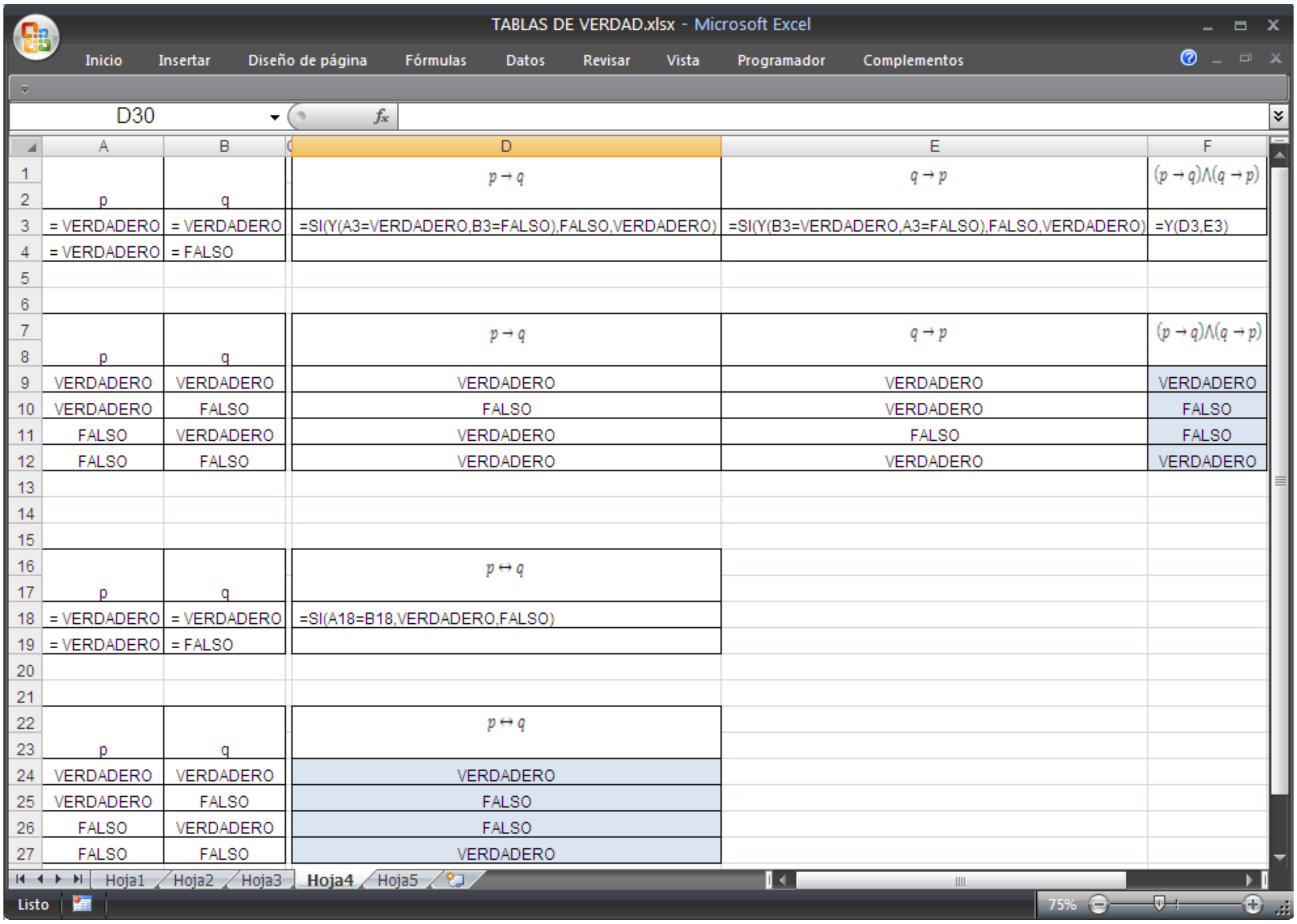
	A	B	C	D	E	F	G
1-2	p	q		$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$	
3	=VERDADERO	=VERDADERO		=Y(A3,B3)	=NO(D3)	=O(A3,E3)	
4	=VERDADERO	=FALSO					
5							
6							
7-8	p	q		$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$	
9	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	FALSO	VERDADERO	
10	VERDADERO	FALSO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO	
11	FALSO	VERDADERO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO	
12	FALSO	FALSO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO	
13							
14							
15							
16-17	p	q		$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
18	=VERDADERO	=VERDADERO		=Y(A18,B18)	=O(A18,B18)	=NO(E18)	=Y(D18,F18)
19	=VERDADERO	=FALSO					
20							
21							
22-23	p	q		$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$
24	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	FALSO	FALSO
25	VERDADERO	FALSO		FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO
26	FALSO	VERDADERO		FALSO	VERDADERO	FALSO	FALSO
27	FALSO	FALSO		FALSO	FALSO	VERDADERO	FALSO

La primera proposición es tautología puesto que es verdadera independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones simples. La segunda es siempre falsa, por lo tanto es una contradicción.

<u>EJEMPLO</u> (Equivalencia Lógica)

Probar que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$.

Para ello es necesario construír la tabla de verdad de cada proposición.



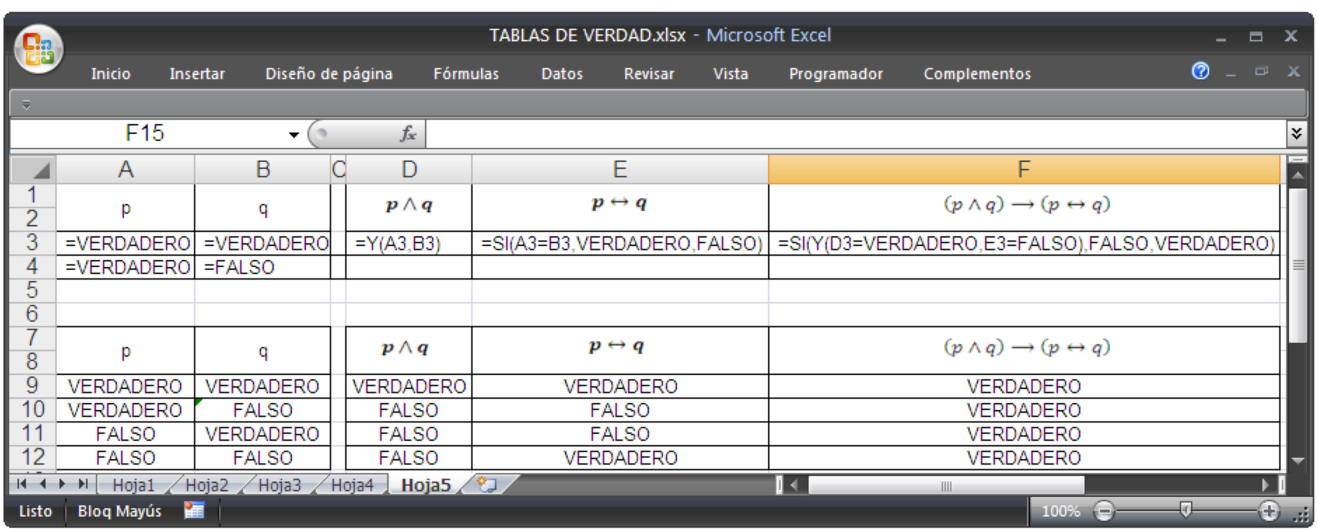
	A	B	C	D	E	F
1–2	p	q		$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q)\wedge(q \to p)$
3	= VERDADERO	= VERDADERO		=SI(Y(A3=VERDADERO,B3=FALSO),FALSO,VERDADERO)	=SI(Y(B3=VERDADERO,A3=FALSO),FALSO,VERDADERO)	=Y(D3,E3)
4	= VERDADERO	= FALSO				
7–8	p	q		$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q)\wedge(q \to p)$
9	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
10	VERDADERO	FALSO		FALSO	VERDADERO	FALSO
11	FALSO	VERDADERO		VERDADERO	FALSO	FALSO
12	FALSO	FALSO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
16–17	p	q		$p \leftrightarrow q$		
18	= VERDADERO	= VERDADERO		=SI(A18=B18,VERDADERO,FALSO)		
19	= VERDADERO	= FALSO				
22–23	p	q		$p \leftrightarrow q$		
24	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO		
25	VERDADERO	FALSO		FALSO		
26	FALSO	VERDADERO		FALSO		
27	FALSO	FALSO		VERDADERO		

Las proposiciones son lógicamente equivalentes puesto que sus tablas de verdad son iguales.

<u>EJEMPLO</u> (Implicación Lógica)

Demostrar que $p \wedge q$ implica lógicamente $p \leftrightarrow q$.

Para ello es necesario probar que la proposición $(p \wedge q) \longrightarrow (p \leftrightarrow q)$ es una tautología.



	A	B	C	D	E	F
1–2	p	q		$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \longrightarrow (p \leftrightarrow q)$
3	=VERDADERO	=VERDADERO		=Y(A3,B3)	=SI(A3=B3,VERDADERO,FALSO)	=SI(Y(D3=VERDADERO,E3=FALSO),FALSO,VERDADERO)
4	=VERDADERO	=FALSO				
7–8	p	q		$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \longrightarrow (p \leftrightarrow q)$
9	VERDADERO	VERDADERO		VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
10	VERDADERO	FALSO		FALSO	FALSO	VERDADERO
11	FALSO	VERDADERO		FALSO	FALSO	VERDADERO
12	FALSO	FALSO		FALSO	VERDADERO	VERDADERO

La proposición $P = p \wedge q$ implica lógicamente a la proposición $Q = p \leftrightarrow q$. Cuando P es verdadera Q también lo es.

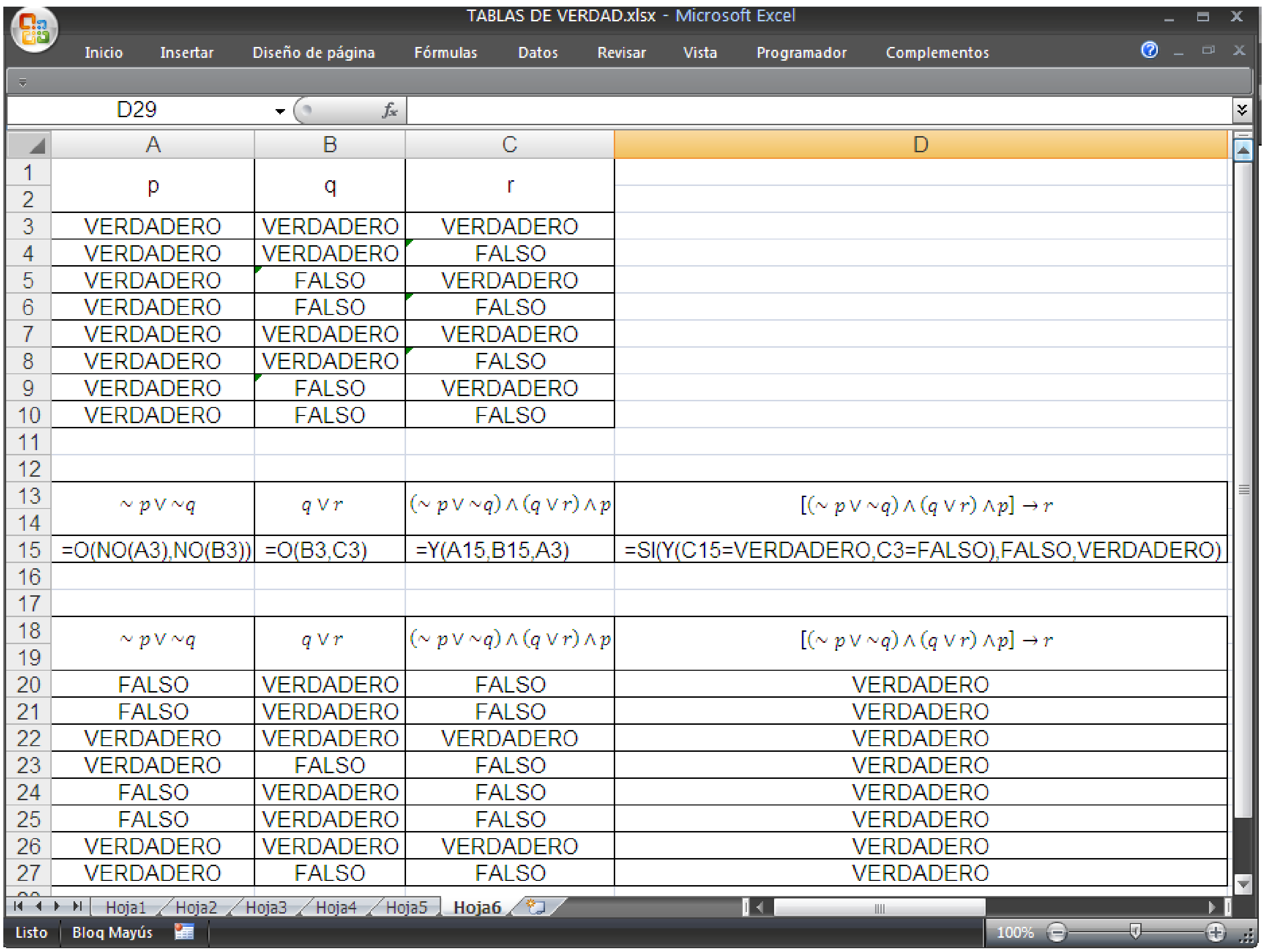
<u>EJEMPLO</u> (Argumentos Lógicos)

Determinar la validez del siguiente argumento.

$\sim p \vee \sim q$, $q \vee r$, $p \vdash r$

Se debe probar que la conjunción de las premisas implica a la conclusión.

$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \rightarrow r$



	A	B	C	D
1–2	p	q	r	
3	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	
4	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	
5	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	
6	VERDADERO	FALSO	FALSO	
7	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	
8	VERDADERO	VERDADERO	FALSO	
9	VERDADERO	FALSO	VERDADERO	
10	VERDADERO	FALSO	FALSO	
11				
12				
13–14	$\sim p \vee \sim q$	$q \vee r$	$(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p$	$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \rightarrow r$
15	=O(NO(A3),NO(B3))	=O(B3,C3)	=Y(A15,B15,A3)	=SI(Y(C15=VERDADERO,C3=FALSO),FALSO,VERDADERO)
16				
17				
18–19	$\sim p \vee \sim q$	$q \vee r$	$(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p$	$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \rightarrow r$
20	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
21	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
22	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
23	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO
24	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
25	FALSO	VERDADERO	FALSO	VERDADERO
26	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
27	VERDADERO	FALSO	FALSO	VERDADERO

El argumento es válido debido a que la proposición $[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \rightarrow r$ es una tautología.

CAPÍTULO V

5. NÚMEROS COMPLEJOS

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. Para resolverla es necesario el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, que contiene a $\mathbb{R}$ y a los números cuyos cuadrados son negativos llamados imaginarios.

Un número complejo tiene la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria que tiene las siguientes propiedades.

$i = \sqrt{-1}$ $\qquad$ $i^2 = -1$

El complejo conjugado de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

5.1. DEFINICIÓN DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Para efectuar operaciones con números complejos se aplca álgebra elemental pero se debe tener presente que $i^2 = -1$.

Suma

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Se suman las partes reales y las partes imaginarias

Resta

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Se restan las partes reales y las partes imaginarias

Multiplicación

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Se multiplican como binomios y se sustituye $i^2 = -1$

División

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Se multiplica el númerador y denominador por el complejo conjugado del denominador

5.2. RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

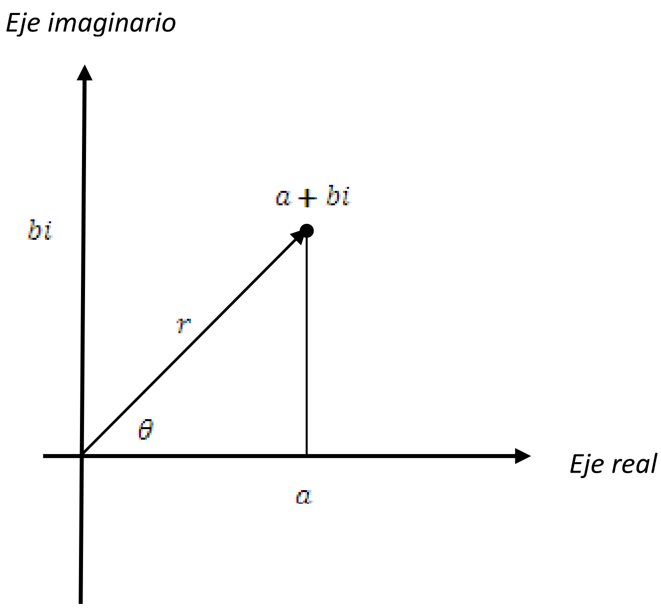
Si $-r$ es un número negativo, entonces las raíces cuadradas de $-r$ son $\sqrt{-r} = \pm i\sqrt{r}$

5.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El valor absoluto de $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

5.4. FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo $z = a + bi$ se representa gráficamente en el plano complejo.



La forma polar o trigonométrica de z es la siguiente:

$z = a + bi = rCos\theta + irSen\theta = r(Cos\theta + iSen\theta)$

El número $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo de z y $\theta = ArcTan(b/a)$ el argumento de z .

5.5. FUNCIONES DEFINIDAS EN EXCEL PARA NÚMEROS COMPLEJOS

5.5.1. COMPLEJO

Convierte coeficientes reales e imaginarios en números complejos.

Sintaxis

COMPLEJO(Núm_Real,Núm_Imaginario)

5.5.2. IM.REAL

Determina la parte real de un número complejo.

Sintaxis

IM.REAL(Núm_Complejo)

5.5.3. IMAGINARIO

Determina la parte imaginaria de un número complejo.

Sintaxis

IMAGINARIO(Núm_Complejo)

5.5.4. IM.CONJUGADA

Es el complejo conjugado de un número complejo.

Sintaxis

IM.CONJUGADA(Núm_Complejo)

5.5.5. IM.SUM

Calcula la suma de números complejos.

Sintaxis

IM.SUM(Núm_Complejo1,Núm_Complejo2,…)

5.5.6. IM.SUSTR

Calcula la diferencia de números complejos.

Sintaxis

IM.SUSTR(Núm_Complejo1,Núm_Complejo2)

5.5.7. IM.PRODUCT

A un conjunto de números complejos les asigna su producto.

Sintaxis

IM.PRODUCT(Núm_Complejo1,Núm_Complejo2,…)

5.5.8. IM.DIV

Encuentra el cociente de dos números complejos.

Sintaxis

IM.DIV(Núm_Complejo1,Núm_Complejo2)

5.5.9. IM.POT

Eleva un número complejo a una potencia.

Sintaxis

IM.POT(Núm_Complejo,Potencia)

5.5.10. IM.RAIZ2

Encuentra la raíz cuadrada de un número complejo.

Sintaxis

IM.RAIZ2(Núm_Complejo)

5.5.11. IM.ABS

Es el valor absoluto o módulo de un número complejo.

Sintaxis

IM.ABS(Núm_Complejo)

5.5.12. IM.ANGULO

Calcula el argumento θ en radianes de un número complejo.

Sintaxis

IM.ANGULO(Núm_Complejo)

5.6. OTRAS FUNCIONES MATEMÁTICAS

5.6.1. RAÍZ

Calcula la raíz cuadrada de un número real.

Sintaxis

RAIZ(Número)

5.6.2. GRADOS

Convierte un ángulo expresado en radianes en un ángulo expresado en grados.

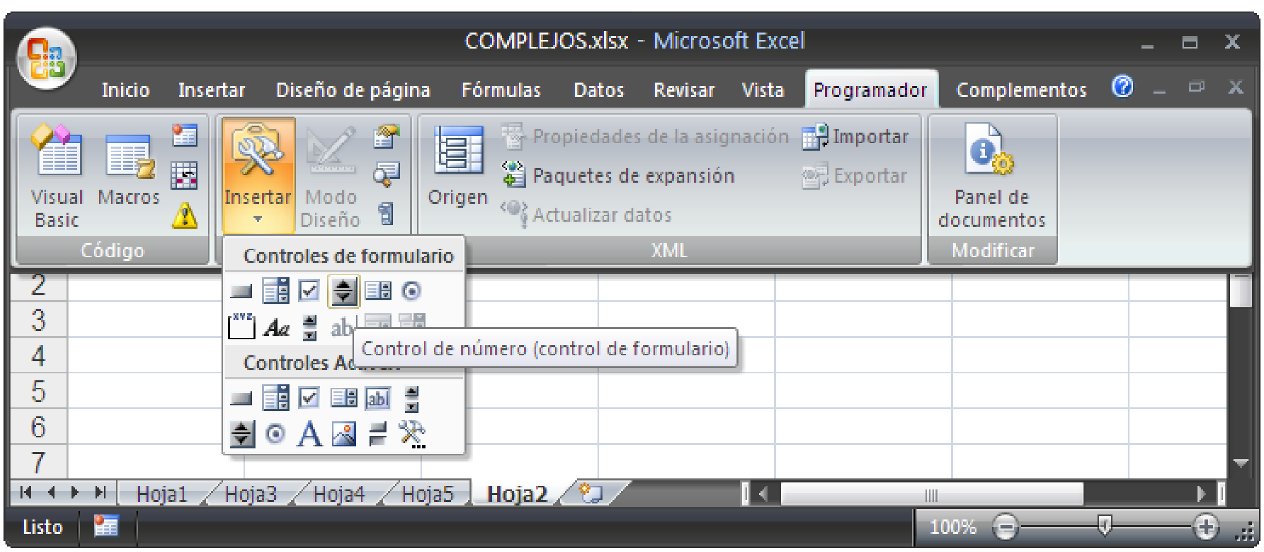
Sintaxis

GRADOS(Ángulo en radianes)

5.7. CONTROLES DE FORMULARIO

Para hacer dinámico y eficiente el trabajo con hojas electrónicas, éstas disponen de CONTROLES DE FORMULARIO. Entre ellos: botón, cuadro combinado, casilla de verificación, control de número, cuadro de lista, botón de opción, etc.

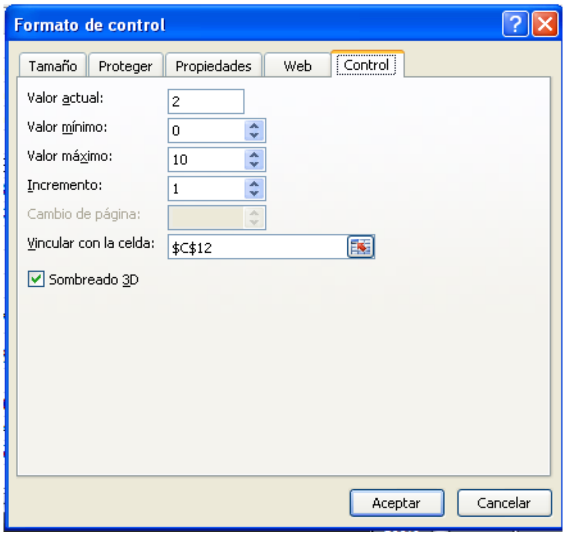
Para insertar controles en una hoja se muestran los menús PROGRAMADOR e INSERTAR.



5.7.1. CONTROL DE NÚMERO

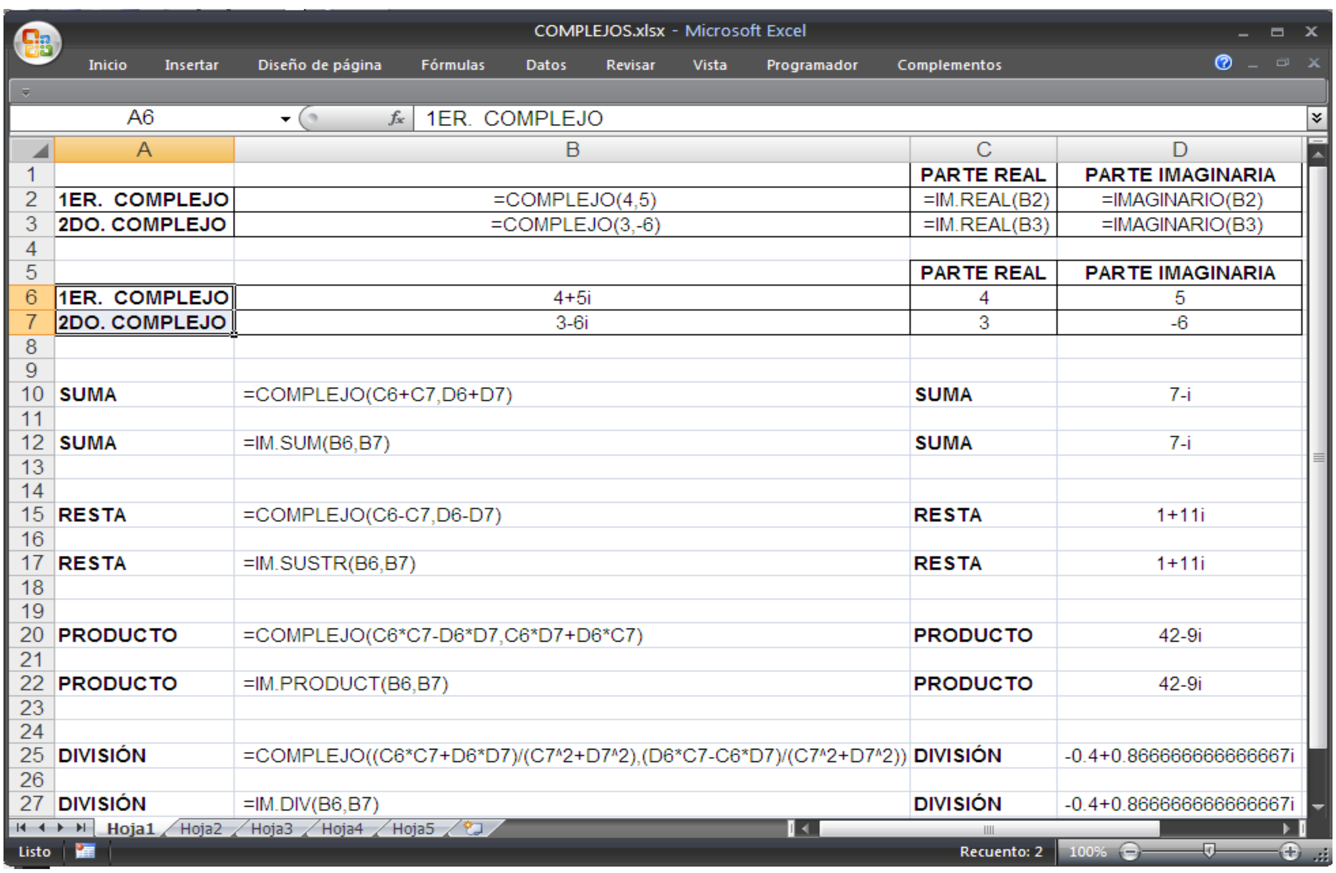
Permite variar el contenido de la celda a la que se vincula. Entonces en una fórmula se hace referencia a una celda de contenido variable.

Para vincular un control de número a una celda y definir los valores mínimo y máximo se procede como sigue: clic derecho al control y se selecciona FORMATO DE CONTROL.



EJEMPLO (Suma, resta, multiplicación y división de números complejos)

Los complejos operandos son $4 + 5i$ y $3 - 6i$.

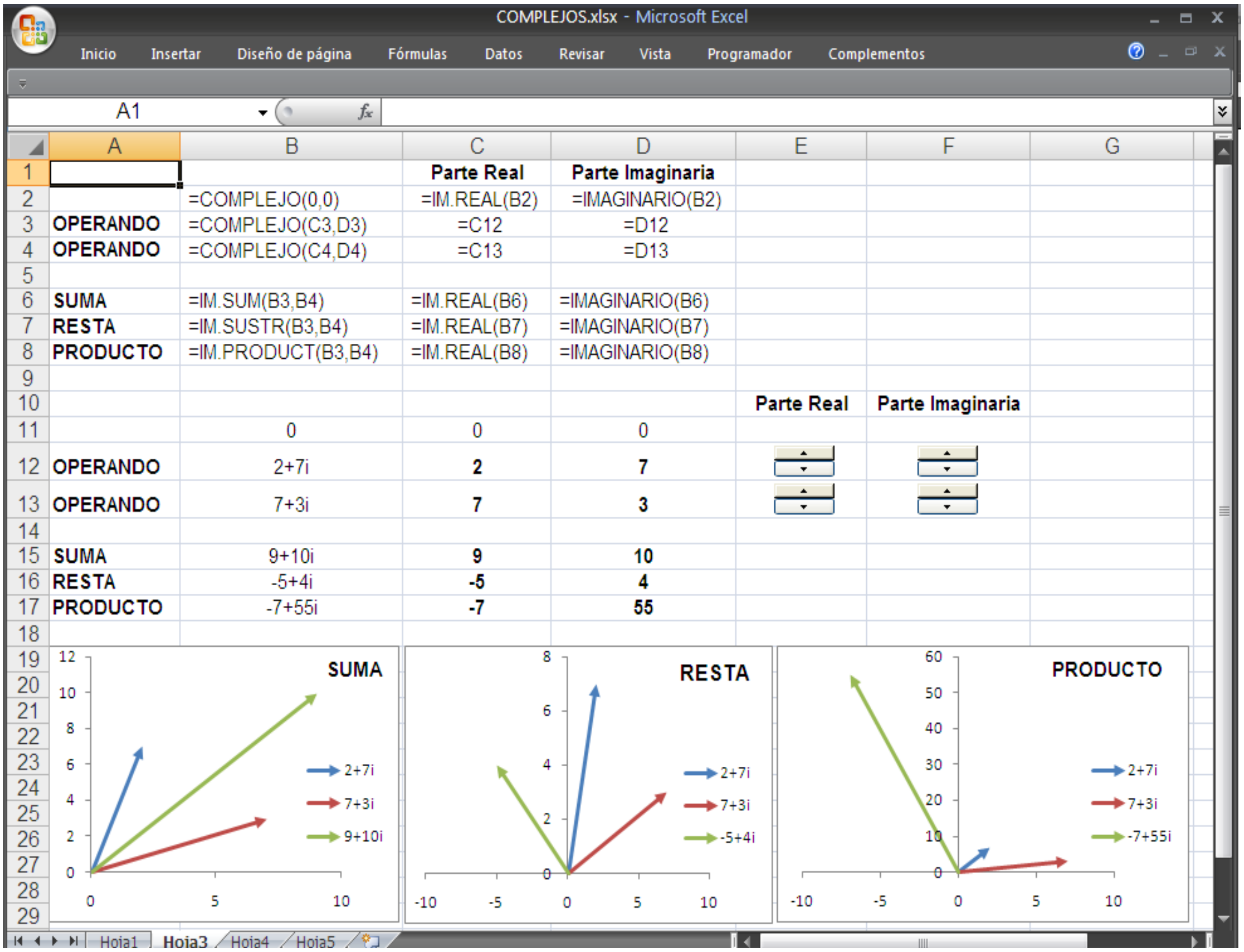


	A	B	C	D
1			PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
2	1ER. COMPLEJO	=COMPLEJO(4,5)	=IM.REAL(B2)	=IMAGINARIO(B2)
3	2DO. COMPLEJO	=COMPLEJO(3,-6)	=IM.REAL(B3)	=IMAGINARIO(B3)
4				
5			PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
6	1ER. COMPLEJO	4+5i	4	5
7	2DO. COMPLEJO	3-6i	3	-6
8				
9				
10	SUMA	=COMPLEJO(C6+C7,D6+D7)	SUMA	7-i
11				
12	SUMA	=IM.SUM(B6,B7)	SUMA	7-i
13				
14				
15	RESTA	=COMPLEJO(C6-C7,D6-D7)	RESTA	1+11i
16				
17	RESTA	=IM.SUSTR(B6,B7)	RESTA	1+11i
18				
19				
20	PRODUCTO	=COMPLEJO(C6*C7-D6*D7,C6*D7+D6*C7)	PRODUCTO	42-9i
21				
22	PRODUCTO	=IM.PRODUCT(B6,B7)	PRODUCTO	42-9i
23				
24				
25	DIVISIÓN	=COMPLEJO((C6*C7+D6*D7)/(C7^2+D7^2),(D6*C7-C6*D7)/(C7^2+D7^2))	DIVISIÓN	-0.4+0.866666666666667i
26				
27	DIVISIÓN	=IM.DIV(B6,B7)	DIVISIÓN	-0.4+0.866666666666667i

Cada operación se efectúa primero aplicando la definición algebraica y luego usando funciones de EXCEL.

EJEMPLO (Suma, resta, multiplicación y división de números complejos)

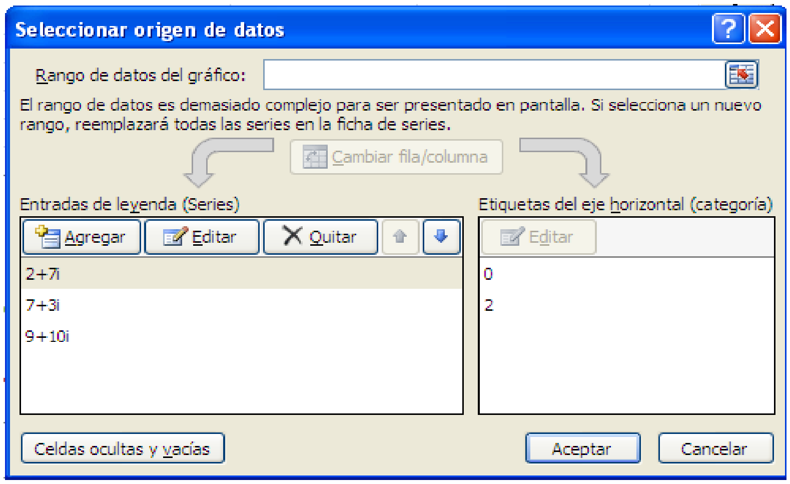
Los números complejos se pueden representar gráficamente en el plano complejo mediante vectores fijos en posición normal. Se requiere del número $0+0i$ para el origen de cada vector.



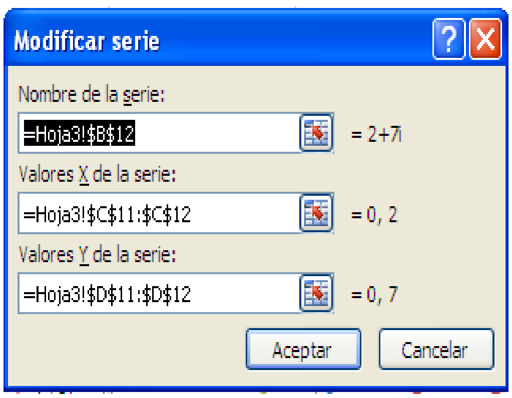
	A	B	C	D	E	F
1			Parte Real	Parte Imaginaria		
2		=COMPLEJO(0,0)	=IM.REAL(B2)	=IMAGINARIO(B2)		
3	OPERANDO	=COMPLEJO(C3,D3)	=C12	=D12		
4	OPERANDO	=COMPLEJO(C4,D4)	=C13	=D13		
5						
6	SUMA	=IM.SUM(B3,B4)	=IM.REAL(B6)	=IMAGINARIO(B6)		
7	RESTA	=IM.SUSTR(B3,B4)	=IM.REAL(B7)	=IMAGINARIO(B7)		
8	PRODUCTO	=IM.PRODUCT(B3,B4)	=IM.REAL(B8)	=IMAGINARIO(B8)		
9						
10					Parte Real	Parte Imaginaria
11		0	0	0		
12	OPERANDO	2+7i	2	7		
13	OPERANDO	7+3i	7	3		
14						
15	SUMA	9+10i	9	10		
16	RESTA	-5+4i	-5	4		
17	PRODUCTO	-7+55i	-7	55		

Los controles de número han sido vinculados a las celdas C12, C13, D12 Y D13.

Para graficar se deben definir series de datos dando clic derecho sobre el área de gráfico y elegir SELECCIONAR DATOS.



Se agregan las series de datos especificando los valores para los ejes x y y .

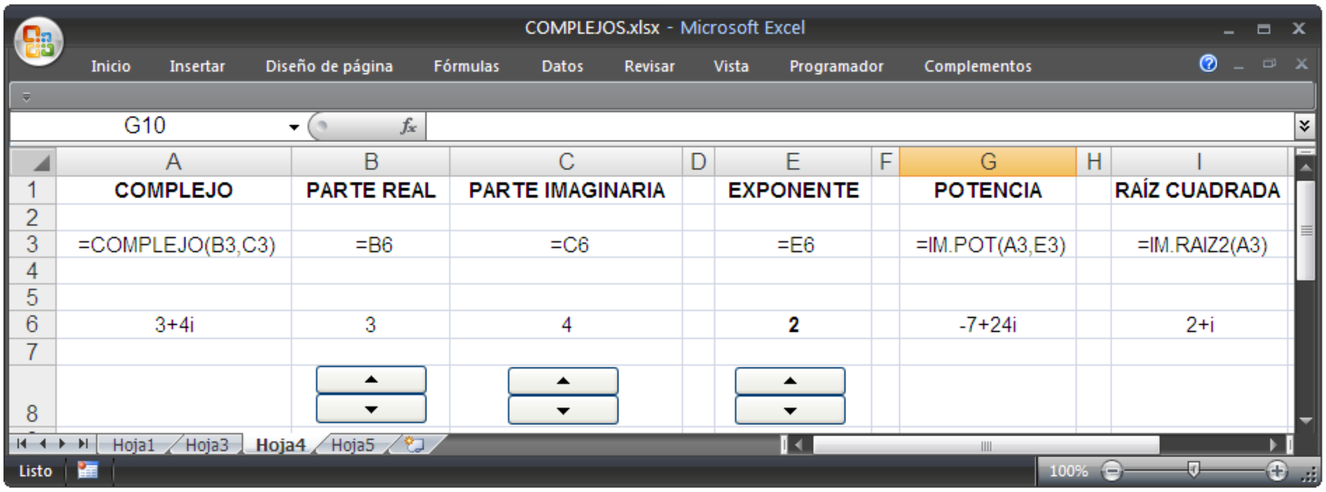


La suma es el número complejo cuya representación gráfica es la diagonal del paralelogramo del cual los sumandos son lados.

La diferencia es la diagonal del paralelogramo de lados z_1 y $-z_2$.

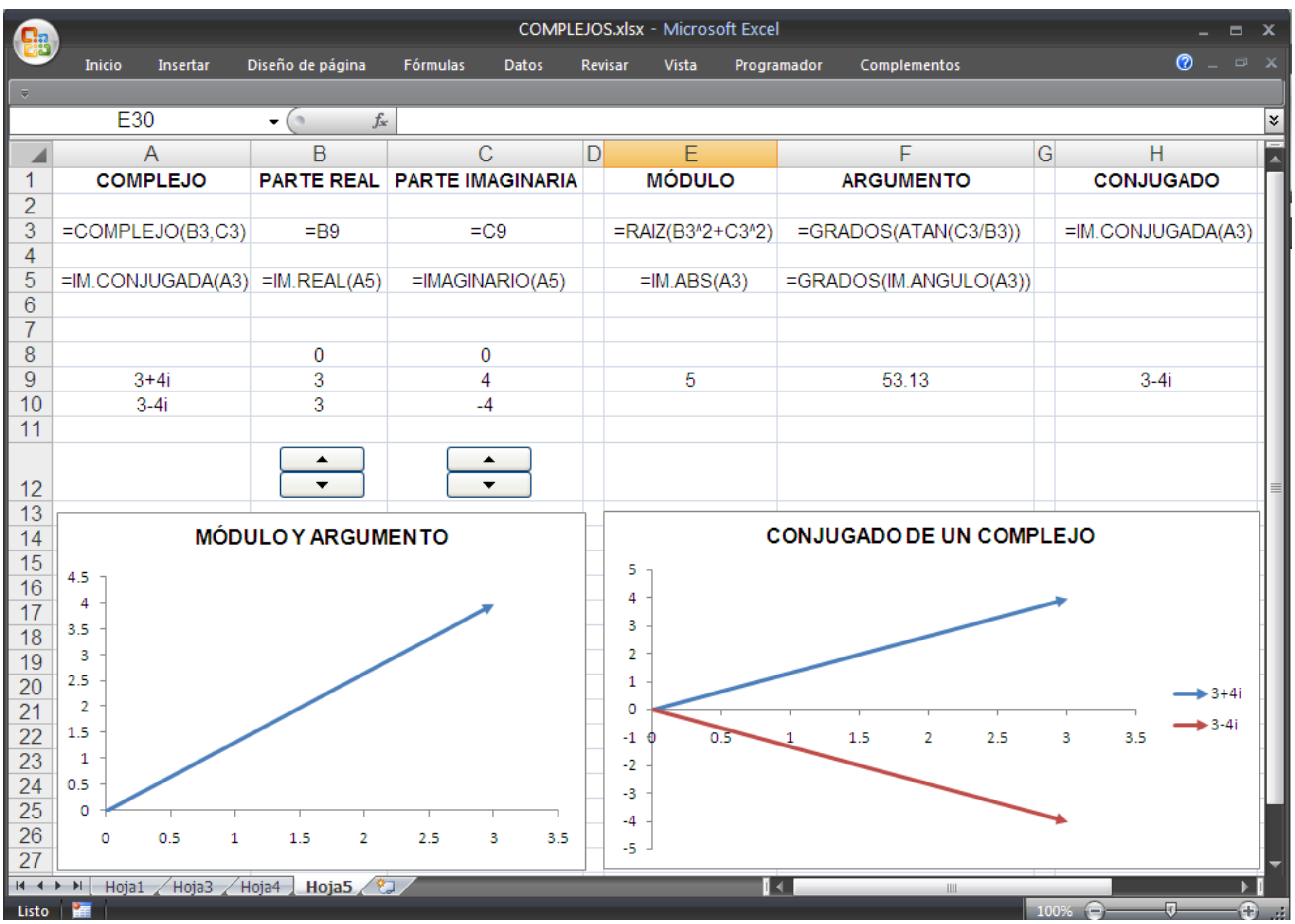
El módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es la suma de los argumentos de los factores.

<u>EJEMPLO</u> (Potenciación y raíz cuadrada de números complejos)

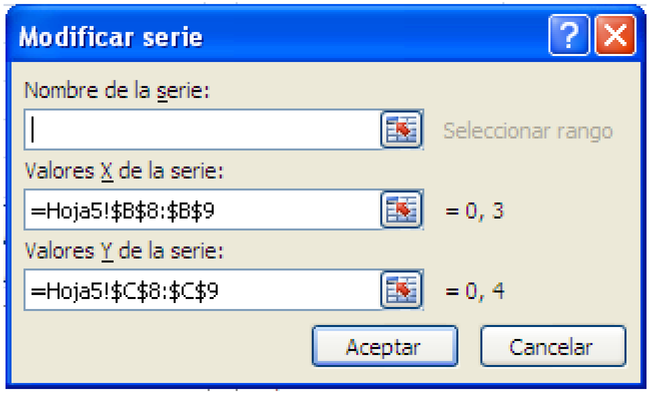


Los controles número están vinculados a las celdas B6, C6 y E6. Estos controles permiten variar las partes real e imaginaria del número complejo, también el exponente de la potencia.

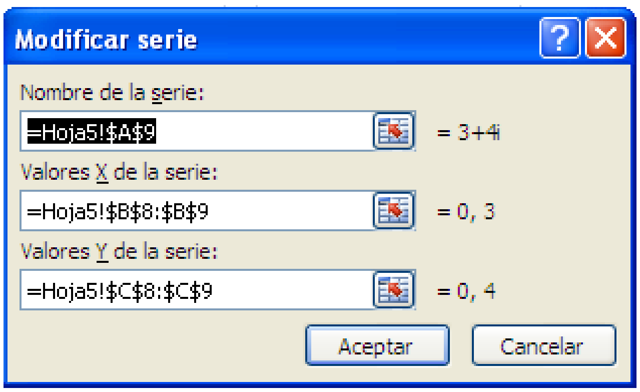
<u>EJEMPLO</u> (Módulo, argumento y conjugado de un número complejo)

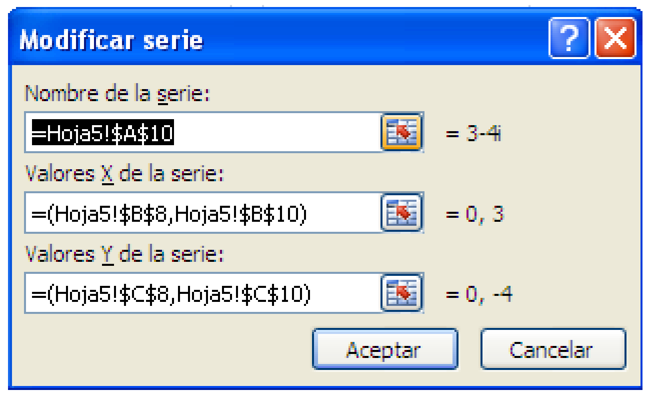


Los controles de número están vinculados a las celdas B9 y C9. En la gráfica MÓDULO Y ARGUMENTO, las series de datos son las que se indican a continuación.



En la gráfica **CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO**, las series son:





<u>CAPÍTULO VI</u>

6. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

El proceso estadístico consiste en la recopilación, organización, análisis e interpretación de datos.

6.1. DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Los datos recopilados se organizan, para facilitar el análisis, en clases o categorías indicando la frecuencia en cada una de ellas. Al arreglo resultante se le llama distribución de frecuencias absolutas.

La frecuencia de una clase más la suma de las frecuencias de las clases anteriores recibe el nombre de frecuencia acumulada.

La razón de la frecuencia absoluta de una clase y la suma de frecuencias se llama frecuencia relativa.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Polígono de frecuencias

Es un gráfico de líneas que muestra las marcas de clase y sus respectivas frecuencias absolutas.

Histograma de frecuencias

Es un gráfico de barras con centros de bases en las marcas de clase y longitud igual al tamaño de los intervalos de clase.

6.2. PROMEDIOS O MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Son valores típicos o representativos de un conjunto numérico de datos estadísticos. Tienden a localizarse en el centro del conjunto ordenado, por ello se conocen como medidas de tendencia central.

6.2.1. Media Aritmética

La media aritmética de un conjunto de n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ se define así:

Para una agrupación simple de datos	Para datos agrupados en intervalos de clase
$Media\ Aritmètica = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$

$f = frecuencia$ es el número de veces que cada x aparece en el conjunto de datos.

La media aritmética es un valor tal que si todos los elementos del conjunto fueran iguales lo serían también a la media aritmética.

6.2.2. Mediana

Es el dato que se localiza exactamente en el centro del conjunto o la media aritmética de los dos datos centrales.

6.2.3. Moda

La moda es el dato de mayor frecuencia. Es el valor más común.

6.2.4. Media Geomètrica

La media geométrica de un conjunto de n datos es la raíz $n-\text{ésima}$ del producto de los datos en el conjunto.

$$Media\ Geométrica = G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

Es empleada para promediar tasas de cambio y valores que presentan progresión geométrica.

6.2.5. Media Armònica

Es el inverso de la media aritmética de los reciprocos de los valores individuales. Se utiliza para promediar razones.

$$Media\ Armónica = H = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}}$$

6.3. MEDIDAS DE POSICIÓN

La mediana es una medida de posición que divide al conjunto en dos partes iguales. Además es posible dividir al conjunto en 4, 10 y 100 partes iguales mediante cuartiles, deciles y percentiles.

6.4. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Dispersiòn es el grado en que los datos numéricos tienden a extenderse alrededor de un promedio. Existen distintas medidas de dispersión o variación, entre ellas: el rango, la desviación media, la desviación típica, etc.

6.4.1. Rango

Es la diferencia entre el mayor y menor de los datos estadísticos. Es ùtil para comparar la dispersiòn de dos conjuntos de datos.

$$Rango = R = x_n - x_1$$

6.4.2. Desviación Media

Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de los datos respecto de algún promedio.

Para una serie simple de datos	Para datos agrupados en intervalos de clase
$Desviaci\grave{o}n\ Media = M.D. = \frac{\sum\lvert x - \bar{x}\rvert}{n}$	$M.D. = \frac{\sum f\lvert x - \bar{x}\rvert}{n}$

6.4.3. Desviación Típica

Es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto de algún promedio. La desviación típica es una medida refinada de dispersión.

Para una serie simple de datos	Para datos agrupados en intervalos de clase
$Desviaci\acute{o}n\ T\acute{\imath}pica = s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n}}$

6.5. CURTOSIS

Es el grado de apuntamiento de una distribución respecto de la distribución normal.

El coeficiente de curtosis es una medida del apuntamiento de una distribución. Se define así:

$$b_2 = Coeficiente\ de\ Curtosis = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Donde:

$$m_4 = momento\ de\ cuarto\ orden\ respecto\ a\ la\ media\ aritm\acute{e}tica = \frac{\sum(x - \bar{x})^4}{n}$$

$$m_2 = momento\ de\ segundo\ orden\ respecto\ a\ la\ media\ aritm\acute{e}tica = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

Si $b_2 - 3$ es positivo la distribución es leptocúrtica (la curva presenta gran elevación en relación a la curva normal) y para $b_2 - 3$ negativo la distribución es platicúrtica (los datos están ampliamente distribuidos alrededor de la media aritmética).

6.6. SESGO

Es el grado de asimetría de una distribución. En una distribución sesgada a la izquierda la mayoría de los datos están por debajo de la moda y sesgada a la derecha cuando la mayoría están por encima de ella.

El coeficiente de sesgo es una medida adimensional de asimetría.

$$Coeficiente\ de\ sesgo = \frac{m_3}{\left(\sqrt{m_2}\right)^3}$$

6.7. <u>REGRESIÓN</u>

Es la estimación de una variable dependiente a partir de una o más variables independientes. Para ello se aproxima una recta (o curva) a los datos.

Inicialmente se representan los datos en un sistema de coordenadas rectangulares. El sistema de puntos resultante se denomina **diagrama de dispersión**.

La curva que mejor se ajusta a los datos es aquella en la que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto de los valores estimados es mínima. Este es el método de **mínimos cuadrados**.

<u>Recta de regresión de mínimos cuadrados</u>

Si los datos se aproximan a una recta, entre las variables existe una relación lineal. Y la ecuación que corresponde es:

$$y = a_0 + a_1 x$$

La ordenada en el origen a_0 y la pendiente de la recta a_1 se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones normales.

$$\sum y = a_0 n + a_1 \sum x$$

$$\sum xy = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2$$

De alli

$$a_0 = \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad a_1 = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

6.8. CORRELACIÓN

Es el grado de relación entre las variables. Se estudia para determinar en qué grado una ecuación describe de forma adecuada la relación entre variables.

Cuando los datos se ajustan a una recta se dice que la correlación es lineal. Si la variable dependiente se incrementa cuando la independiente se incrementa, existe entre ellas correlación positiva. Si disminuye cuando aumenta la variable independiente la correlación es negativa.

6.8.1. Error típico de la estima

Es una medida de la dispersión alrededor de la recta de regresión. Cada valor de la variable dependiente se desvía de las estimaciones hechas mediante la ecuación de regresión.

$$s_{yx} = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a_0 \sum y - a_1 \sum xy}{N}}$$

Si se trazan paralelas a la recta de regresión a distancias verticales de 1, 2 y 3 veces el error típico de la estima, se encuentra que entre éstas rectas quedan incluidos alrededor del 68%, 95% y 99.7% de los puntos.

6.8.2. Coeficiente de Correlación Lineal

Es una medida de la correlación lineal entre dos variables. Varía entre -1 y 1, los signos indican correlación negativa o positiva.

$$r = \frac{\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\sum(X-\bar{X})^2 \sum(Y-\bar{Y})^2}}$$

6.9. FUNCIONES DE EXCEL PARA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

6.9.1. FRECUENCIA

Determina la frecuencia que corresponde a cada valor diferente que una variable toma. El resultado es una matríz de frecuencias.

Sintaxis

FRECUENCIA(datos,grupos)

El parámetro **grupos** es la matríz de valores diferentes que la variable toma.

6.9.2. CONTAR

Cuenta el número de elementos de un conjunto. Número de datos estadísticos.

Sintaxis

CONTAR(dato1,dato2,…)

6.9.3. **PROMEDIO**

Calcula la media aritmética de un conjunto de datos.

Sintaxis

PROMEDIO(dato1,dato2,…)

6.9.4. **MODA**

Determina la moda de un conjunto de datos.

Sintaxis

MODA(dato1,dato2,…)

6.9.5. **MEDIANA**

Determina la mediana de un conjunto de datos.

Sintaxis

MEDIANA(dato1,dato2,…)

6.9.6. **MEDIA.GEOM**

Calcula la media geométrica de un conjunto de datos.

Sintaxis

MEDIA.GEOM(dato1,dato2,…)

6.9.7. **MEDIA.ARMO**

Calcula la media armónica de un conjunto de datos.

Sintaxis

MEDIA.ARMO(dato1,dato2,…)

6.9.8. **INDICE**

Retorna el contenido de la celda que es intersección de la fila y columna especificadas de una matríz de datos.

Sintaxis

INDICE(matríz,fila,columna)

6.9.9. BUSCAR

Busca un valor en una matríz de datos.

Sintaxis

BUSCAR(dato_buscado,vector_de_comparación,vector_resultado)

vector_de_comparación contiene el conjunto de datos en el que se debe efectuar la búsqueda y en **vector_resultado** se encuentra el valor que la función retornará si la búsqueda es positiva.

6.9.10. MAX

Dato mayor de un conjunto.

Sintaxis

MAX(dato1,dato2,…)

6.9.11. MIN

Dato menor de un conjunto.

Sintaxis

MIN(dato1,dato2,…)

6.9.12. CUARTIL

Retorna el cuartil que se indique de un conjunto de datos.

Sintaxis

CUARTIL(conjunto_de_datos,cuartil_número)

6.9.13. PERCENTIL

Retorna el percentil que se indique de un conjunto de datos.

Sintaxis

PERCENTIL(conjunto_de_datos,percentil_número)

6.9.14. CURTOSIS

Calcula la curtosis o apuntamiento de un conjunto de datos.

Sintaxis

CURTOSIS(dato1,dato2,…)

La función utiliza la siguiente ecuación modificada para determinar la curtosis.

$$Curtosis = \left[\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\sum\left(\frac{x_j-\bar{x}}{s}\right)^4\right] - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \qquad s = Desviación\ típica$$

6.9.15. COEFICIENTE.ASIMETRIA

Determina el sesgo o asimetría de un conjunto de datos.

Sintaxis

COEFICIENTE.ASIMETRIA(dato1,dato2,…)

La función utiliza la siguiente ecuación modificada para el cálculo del sesgo.

$$Sesgo = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum\left(\frac{x_j-\bar{x}}{s}\right)^3$$

6.9.16. PRODUCTO

Multiplica todos los elementos de un conjunto de datos.

Sintaxis

PRODUCTO(dato1,dato2,…)

6.9.17. ABS

Valor absoluto de un número.

<u>Sintaxis</u>

ABS(número)

6.9.18. DESVPROM

Calcula la desviación promedio de los elementos de un conjunto respecto de su media aritmética.

<u>Sintaxis</u>

DESVPROM(dato1,dato2,…)

6.9.19. DESVESTP

Calcula la desviación estándar de un conjunto de datos.

<u>Sintaxis</u>

DESVESTP(dato1,dato2,…)

6.9.20. INTERSECCION.EJE

La imagen de la función es la ordenada en el origen de la recta de regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.

<u>Sintaxis</u>

INTERSECCION.EJE(conocido_y,conocido_x)

conocido_y es la matríz de valores dependientes y **conocido_x** contiene valores independientes.

6.9.21. PENDIENTE

La imagen de la función es la pendiente de la recta de regresión lineal por el método de mínimos cuadrados.

<u>Sintaxis</u>

PENDIENTE(conocido_y,conocido_x)

6.9.22. TENDENCIA

Hace la estimación lineal de valores y a partir de valores x usando una ecuación de regresión por el método de mínimos cuadrados.

<u>Sintaxis</u>

TENDENCIA(y,x)

6.9.23. SUMAPRODUCTO

Suma los productos de elementos correspondientes en dos o más matrices.

<u>Sintaxis</u>

SUMAPRODUCTO(matríz1,matríz2,…)

6.9.24. SUMA.CUADRADOS

Suma los cuadrados de los elementos de un conjunto de datos.

<u>Sintaxis</u>

SUMA.CUADRADOS(dato1,dato2,…)

6.9.25. ERROR.TIPICO.XY

Es la desviación típica de las desviaciones de los valores y estimados respecto de los valores y observados. La estimación es lineal y por el método de mínimos cuadrados.

<u>Sintaxis</u>

ERROR.TIPICO.XY(conocido_y,conocido_x)

La función aplica la siguiente ecuación para determinar el error típico de la estimación lineal.

$$s_{yx} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\sum(y-\bar{y})^2 - \frac{\left[\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})\right]^2}{\Sigma(x-\bar{x})^2}\right]}$$

6.9.26. COEF.DE.CORREL

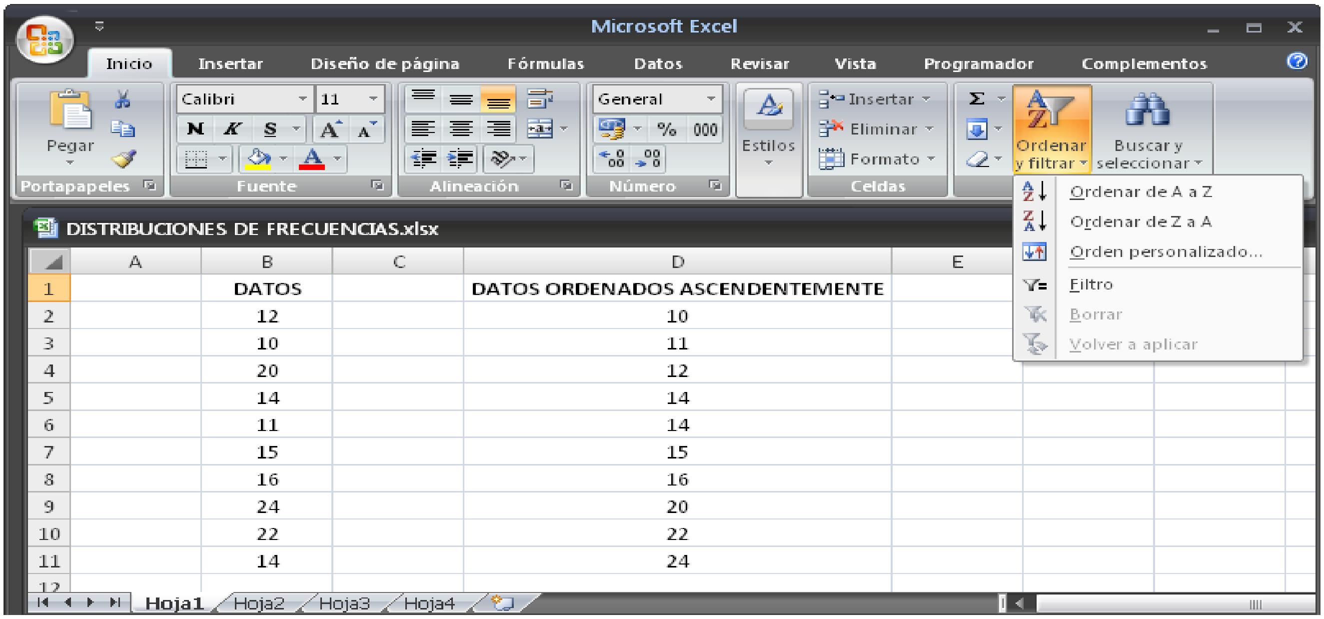
Calcula el coeficiente de correlación entre dos conjuntos de datos estadísticos.

<u>Sintaxis</u>

COEF.DE.CORREL(primer_conjunto,segundo_conjunto)

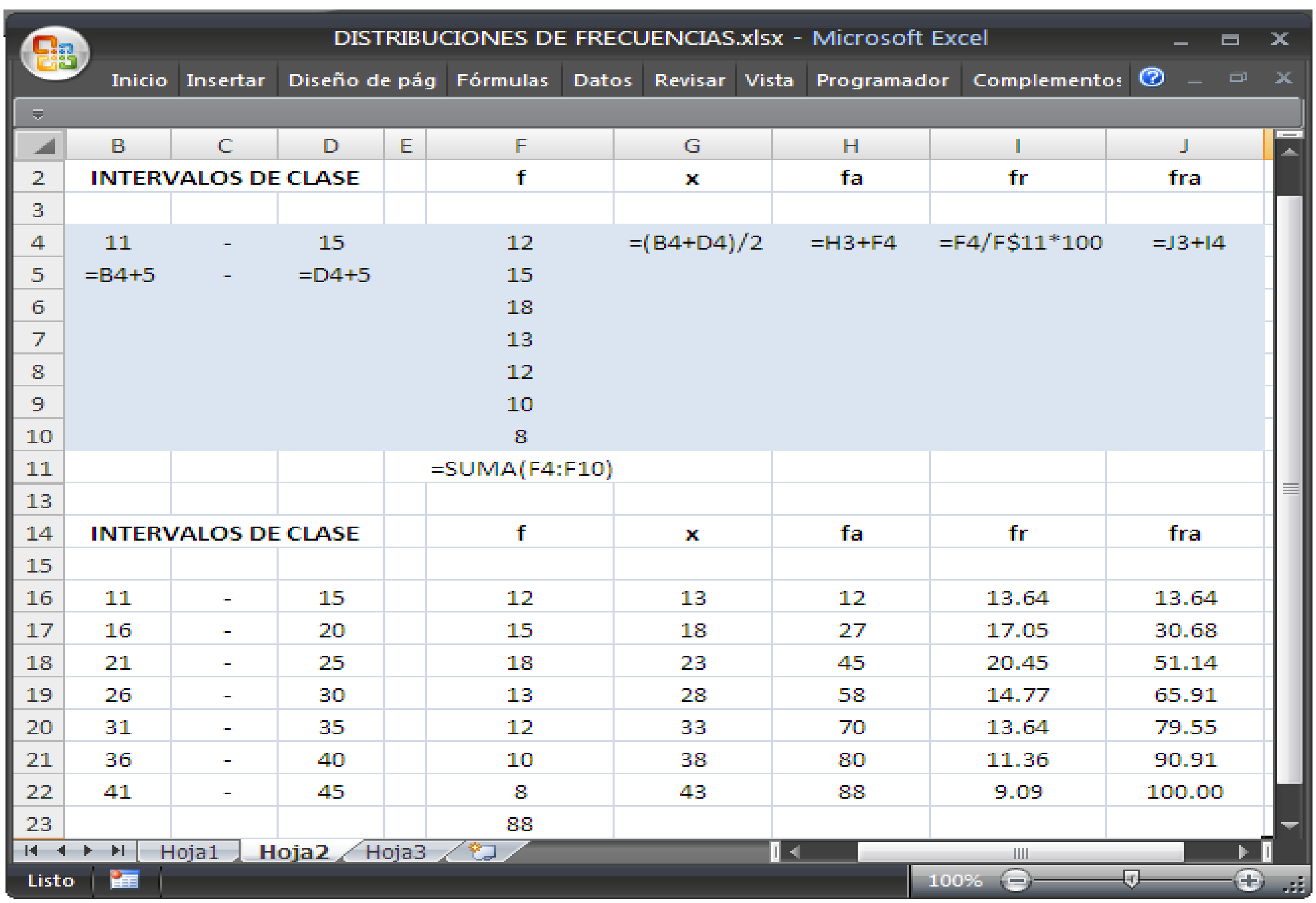
<u>EJEMPLO</u> (Ordenamiento ascendente o descendente de datos)

Seleccionar el rango de celdas que contiene los datos a ordenar y luego mostrar el menú ordenar y filtrar.



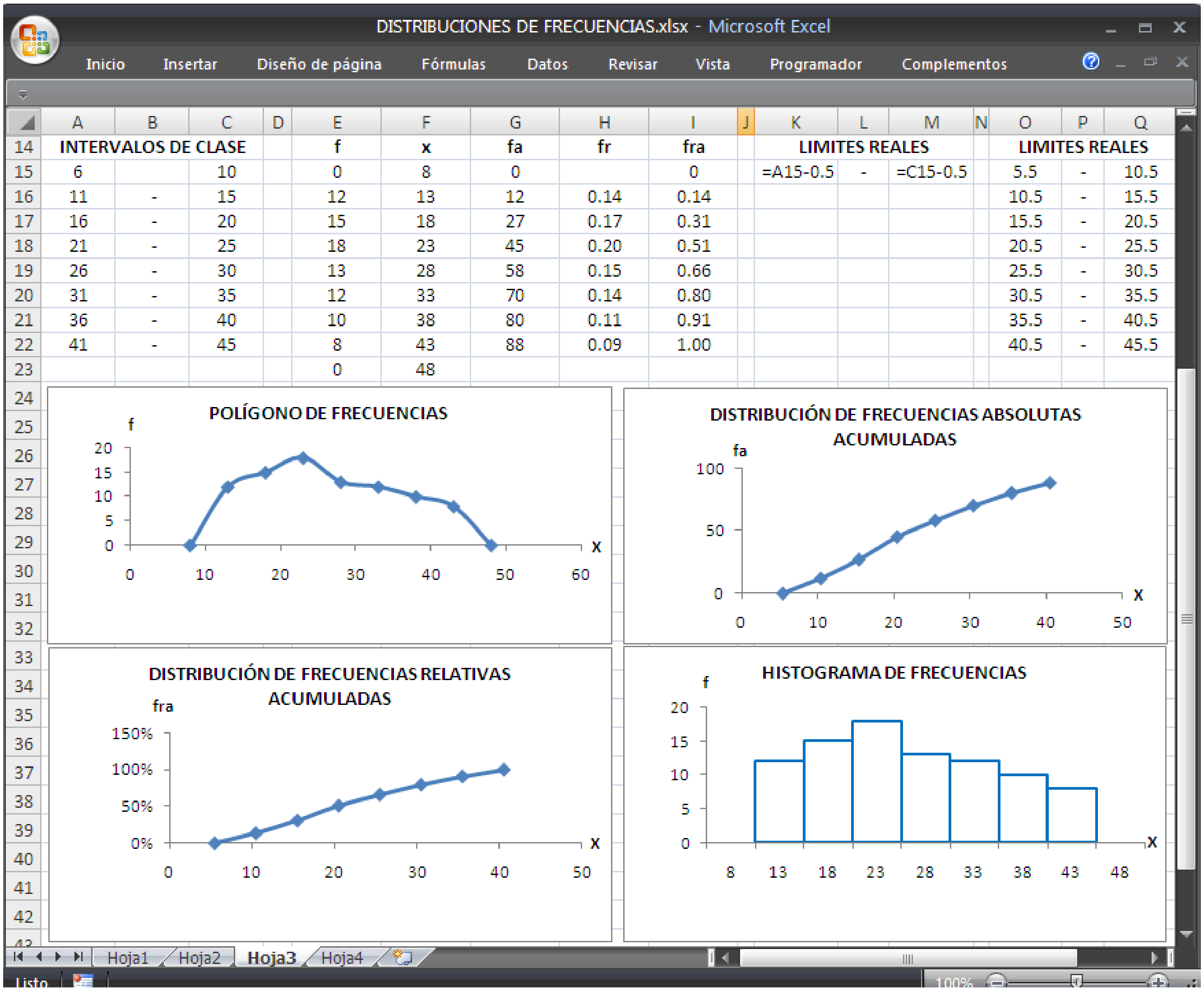
	A	B	C	D	E
1		DATOS		DATOS ORDENADOS ASCENDENTEMENTE	
2		12		10	
3		10		11	
4		20		12	
5		14		14	
6		11		14	
7		15		15	
8		16		16	
9		24		20	
10		22		22	
11		14		24	

EJEMPLO (Marca de clase **x**, distribuciones de frecuencias absolutas **f**, absolutas acumuladas **fa**, relativas **fr** y relativas acumuladas **fra**)



	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	INTERVALOS DE CLASE				f	x	fa	fr	fra
3									
4	11	-	15		12	=(B4+D4)/2	=H3+F4	=F4/F$11*100	=J3+I4
5	=B4+5	-	=D4+5		15				
6					18				
7					13				
8					12				
9					10				
10					8				
11					=SUMA(F4:F10)				
13									
14	INTERVALOS DE CLASE				f	x	fa	fr	fra
15									
16	11	-	15		12	13	12	13.64	13.64
17	16	-	20		15	18	27	17.05	30.68
18	21	-	25		18	23	45	20.45	51.14
19	26	-	30		13	28	58	14.77	65.91
20	31	-	35		12	33	70	13.64	79.55
21	36	-	40		10	38	80	11.36	90.91
22	41	-	45		8	43	88	9.09	100.00
23					88				

EJEMPLO (Representación gráfica de una distribución de frecuencias)

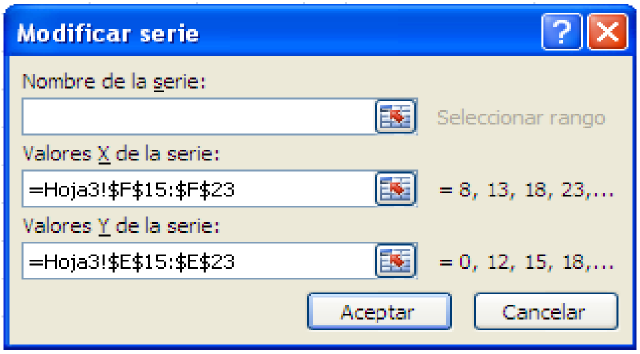


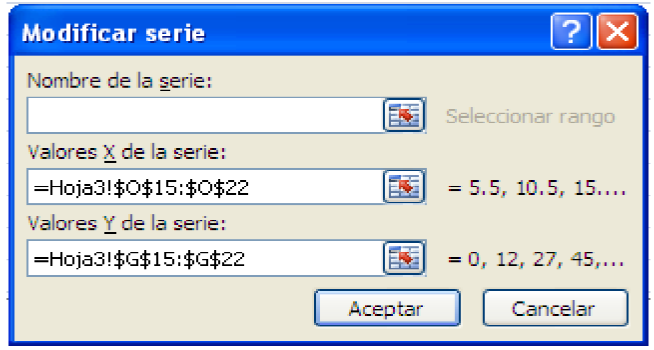
INTERVALOS DE CLASE			f	x	fa	fr	fra	LIMITES REALES			LIMITES REALES		
6		10	0	8	0		0	=A15-0.5	-	=C15-0.5	5.5	-	10.5
11	-	15	12	13	12	0.14	0.14				10.5	-	15.5
16	-	20	15	18	27	0.17	0.31				15.5	-	20.5
21	-	25	18	23	45	0.20	0.51				20.5	-	25.5
26	-	30	13	28	58	0.15	0.66				25.5	-	30.5
31	-	35	12	33	70	0.14	0.80				30.5	-	35.5
36	-	40	10	38	80	0.11	0.91				35.5	-	40.5
41	-	45	8	43	88	0.09	1.00				40.5	-	45.5
			0	48									

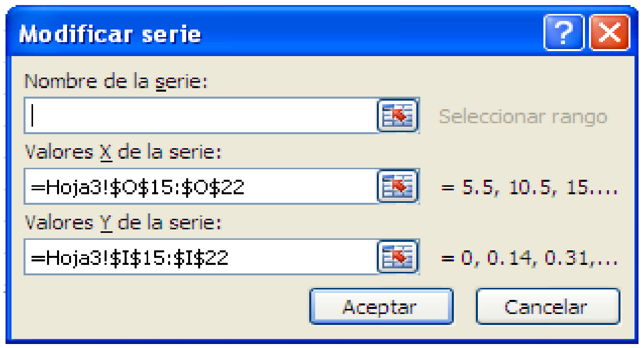
El tipo de gráfico adecuado es **xy (dispersión)**. Para el histograma de frecuencias es necesario cambiar ese tipo de gráfico por el tipo **barras**. Para unir las barras: clic derecho sobre cualquier barra, dar formato a la serie de datos, en la ventana mostrada el ancho del intervalo se ajusta **sin intervalo**.

Para graficar se debe agregar la clase con frecuencia 0.

Se definen las series de datos asi: clic derecho sobre el área del gráfico, seleccionar datos, agregar, serie **x** y serie **y**.

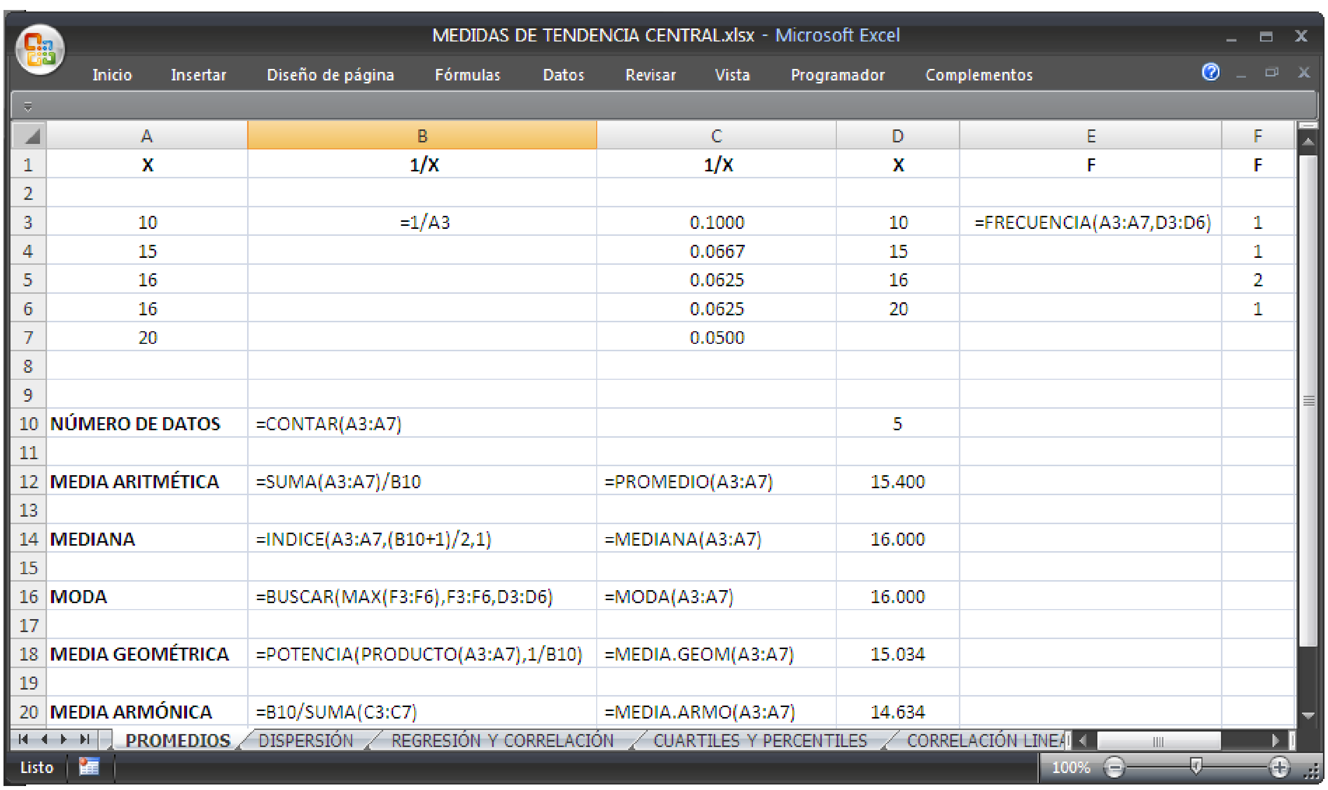






<u>EJEMPLO</u> (Promedios o medidas de tendencia central)

Calcular promedios desarrollando los procedimientos tradicionales y luego usando funciones de EXCEL.



	A	B	C	D	E	F
1	X	1/X	1/X	X	F	F
2						
3	10	=1/A3	0.1000	10	=FRECUENCIA(A3:A7,D3:D6)	1
4	15		0.0667	15		1
5	16		0.0625	16		2
6	16		0.0625	20		1
7	20		0.0500			
8						
9						
10	NÚMERO DE DATOS	=CONTAR(A3:A7)		5		
11						
12	MEDIA ARITMÉTICA	=SUMA(A3:A7)/B10	=PROMEDIO(A3:A7)	15.400		
13						
14	MEDIANA	=INDICE(A3:A7,(B10+1)/2,1)	=MEDIANA(A3:A7)	16.000		
15						
16	MODA	=BUSCAR(MAX(F3:F6),F3:F6,D3:D6)	=MODA(A3:A7)	16.000		
17						
18	MEDIA GEOMÉTRICA	=POTENCIA(PRODUCTO(A3:A7),1/B10)	=MEDIA.GEOM(A3:A7)	15.034		
19						
20	MEDIA ARMÓNICA	=B10/SUMA(C3:C7)	=MEDIA.ARMO(A3:A7)	14.634		

EJEMPLO (Cuartiles y percentiles)

	B	D	F	H	J	L	N
6	X						
7							
8	2						
9	3						
10	5						
11	7						
12	10						
13							
14	N	=CONTAR(B8:B12)	5				
15							
16		POSICIÓN	POSICIÓN	VALOR	VALOR	VALOR (EXCEL)	VALOR (EXCEL)
17	CUARTIL 1	=F14/4	1.25	=1/4*B8+3/4*B9	2.75	=CUARTIL(B8:B12,1)	3
18	CUARTIL 2	=2*F14/4	2.5	=B10	5.00	=CUARTIL(B8:B12,2)	5
19	CUARTIL 3	=3*F14/4	3.75	=3/4*B11+1/4*B12	7.75	=CUARTIL(B8:B12,3)	7
20							
21	PERCENTIL 25	=25*F14/100	1.25	=25/100*B8+75/100*B9	2.75	=PERCENTIL(B8:B12,0.25)	3
22	PERCENTIL 50	=50*F14/100	2.5	=B10	5	=PERCENTIL(B8:B12,0.5)	5
23	PERCENTIL 75	=75*F14/100	3.75	=75/100*B11+25/100*B12	7.75	=PERCENTIL(B8:B12,0.75)	7

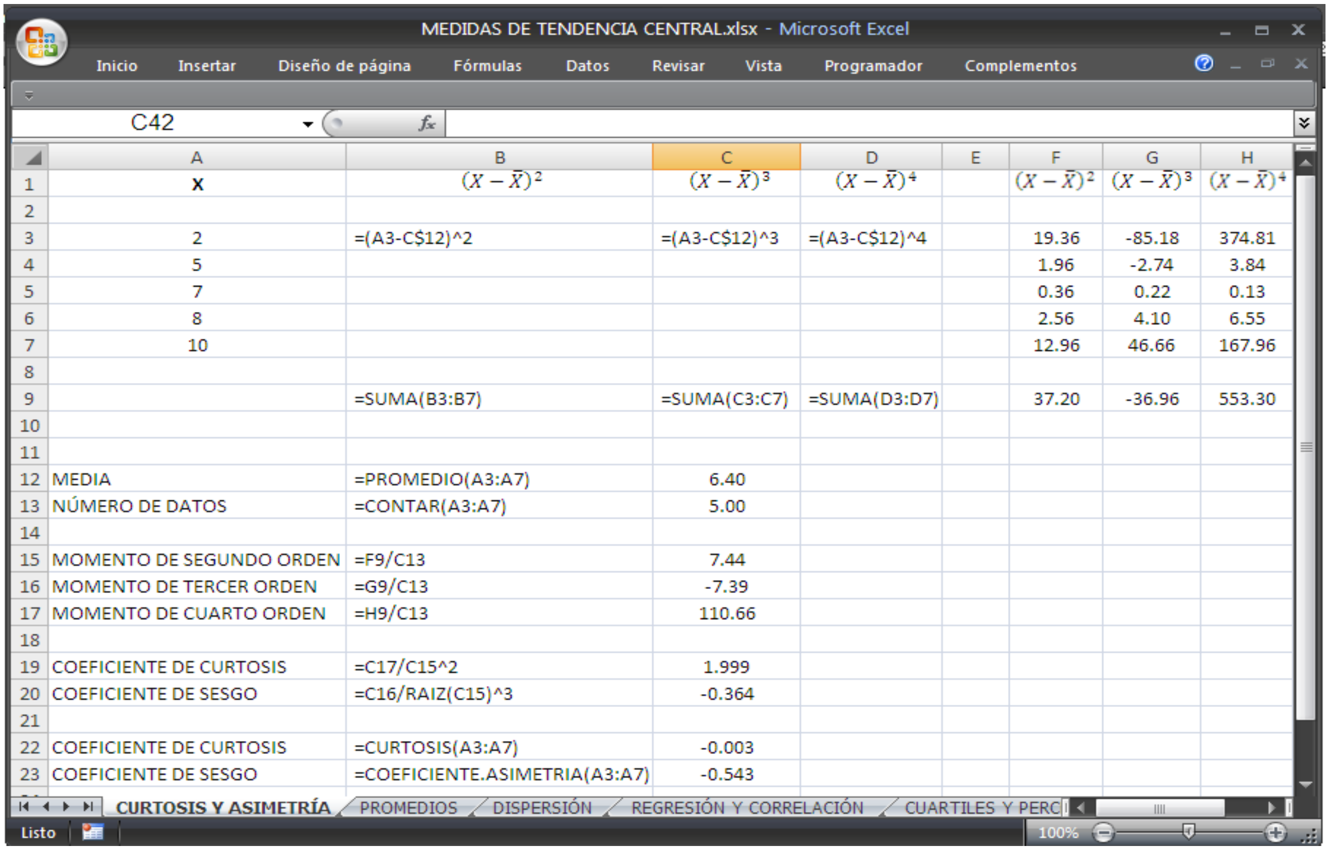
Las funciones CUARTIL y PERCENTIL de EXCEL no utilizan interpolación lineal para determinar las medidas de posición. Se han calculado cuartiles y percentiles según sus posiciones dentro del conjunto de datos.

EJEMPLO (Medidas de dispersión: rango, desviación media y desviación típica)

Calcular medidas de dispersión siguiendo los procedimientos tradicionales y usando funciones de EXCEL.

	A	B	C	D	E	F	H	I	J
1	X		$d = X - \bar{X}$	$\lvert d \rvert$	d^2		$d = X - \bar{X}$	$\lvert d \rvert$	d^2
2									
3	10		=A3-B$13	=ABS(C3)	=C3^2		-2.75	2.75	7.5625
4	12						-0.75	0.75	0.5625
5	14						1.25	1.25	1.5625
6	15						2.25	2.25	5.0625
7									
8									
9	NÚMERO DE DATOS	=CONTAR(A3:A6)		4					
10									
11	RANGO	=A6-A3	=MAX(A3:A6)-MIN(A3:A6)	5					
12									
13	MEDIA ARITMÉTICA	=SUMA(A3:A6)/B9	=PROMEDIO(A3:A6)	12.75					
14									
15	DESVIACIÓN MEDIA	=SUMA(D3:D6)/B9	=DESVPROM(A3:A6)	1.75					
16									
17	DESVIACIÓN TÍPICA	=RAIZ(SUMA(E3:E6)/B9)	=DESVESTP(A3:A6)	1.92					

EJEMPLO (Curtosis y sesgo de un conjunto de datos estadísticos)



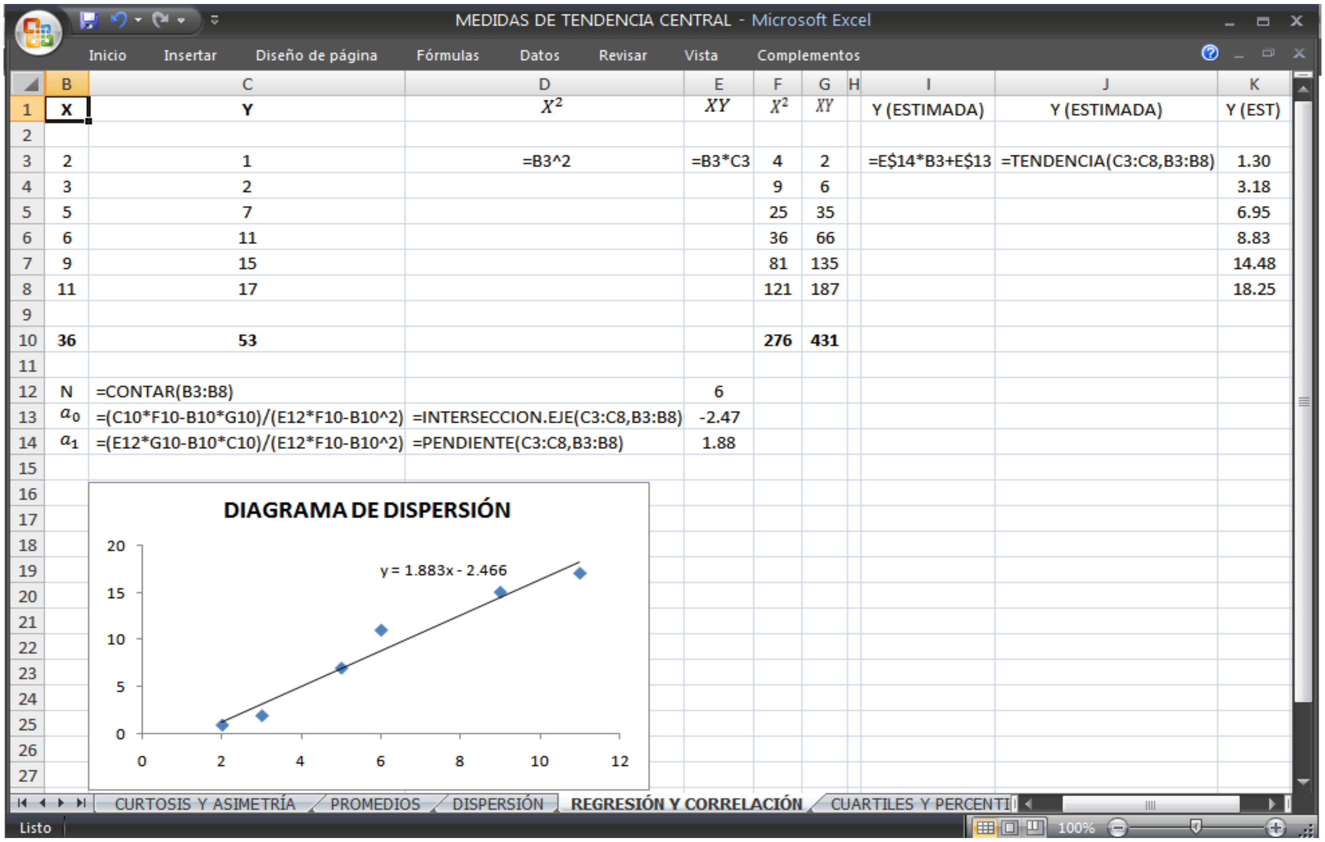
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$		$(X-\bar{X})^2$	$(X-\bar{X})^3$	$(X-\bar{X})^4$
2								
3	2	=(A3-C$12)^2	=(A3-C$12)^3	=(A3-C$12)^4		19.36	-85.18	374.81
4	5					1.96	-2.74	3.84
5	7					0.36	0.22	0.13
6	8					2.56	4.10	6.55
7	10					12.96	46.66	167.96
8								
9		=SUMA(B3:B7)	=SUMA(C3:C7)	=SUMA(D3:D7)		37.20	-36.96	553.30
10								
11								
12	MEDIA	=PROMEDIO(A3:A7)	6.40					
13	NÚMERO DE DATOS	=CONTAR(A3:A7)	5.00					
14								
15	MOMENTO DE SEGUNDO ORDEN	=F9/C13	7.44					
16	MOMENTO DE TERCER ORDEN	=G9/C13	-7.39					
17	MOMENTO DE CUARTO ORDEN	=H9/C13	110.66					
18								
19	COEFICIENTE DE CURTOSIS	=C17/C15^2	1.999					
20	COEFICIENTE DE SESGO	=C16/RAIZ(C15)^3	-0.364					
21								
22	COEFICIENTE DE CURTOSIS	=CURTOSIS(A3:A7)	-0.003					
23	COEFICIENTE DE SESGO	=COEFICIENTE.ASIMETRIA(A3:A7)	-0.543					

Las funciones CURTOSIS y COEFICIENTE.ASIMETRIA de EXCEL utilizan ecuaciones modificadas para el cálculo del apuntamiento y sesgo de un conjunto de datos.

Como $\textit{Coeficiente de Curtosis} - 3 < 0$ la distribución es platicúrtica. Los datos se encuentran ampliamente distribuidos alrededor de la media aritmética.

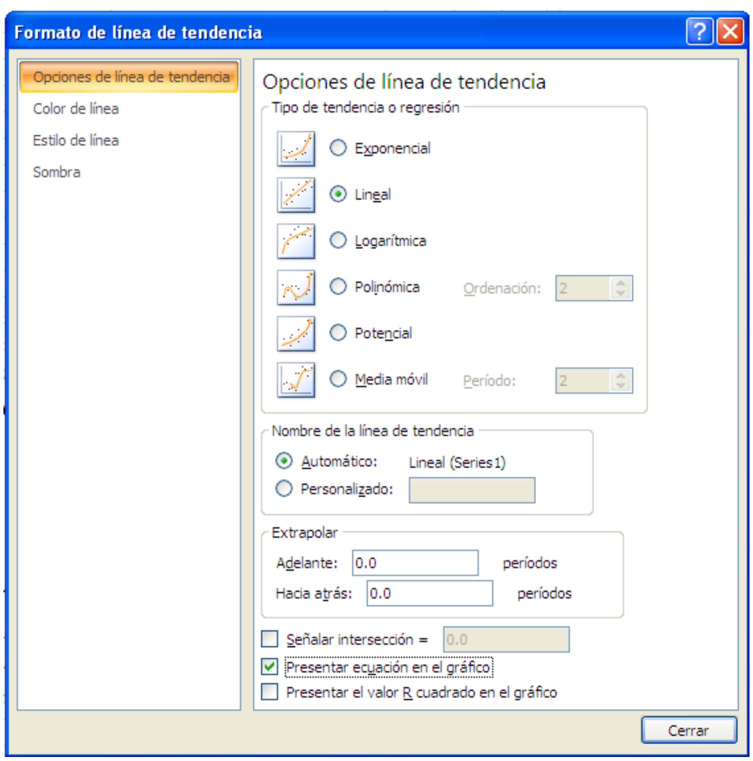
La mayoría de los datos están por debajo de la moda puesto que la distribución está sesgada hacia la izquierda. El coeficiente de sesgo es negativo.

EJEMPLO (Regresión Lineal aplicando el método de Mínimos Cuadrados)



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X	Y	X^2	XY	X^2	XY		Y (ESTIMADA)	Y (ESTIMADA)	Y (EST)
2										
3	2	1	=B3^2	=B3*C3	4	2		=E$14*B3+E$13	=TENDENCIA(C3:C8,B3:B8)	1.30
4	3	2			9	6				3.18
5	5	7			25	35				6.95
6	6	11			36	66				8.83
7	9	15			81	135				14.48
8	11	17			121	187				18.25
9										
10	36	53			276	431				
11										
12	N	=CONTAR(B3:B8)		6						
13	a_0	=(C10*F10-B10*G10)/(E12*F10-B10^2)	=INTERSECCION.EJE(C3:C8,B3:B8)	-2.47						
14	a_1	=(E12*G10-B10*C10)/(E12*F10-B10^2)	=PENDIENTE(C3:C8,B3:B8)	1.88						

Para mostrar la recta y ecuación de regresión en el diagrama de dispersión: clic derecho sobre alguno de los puntos y agregar línea de tendencia.



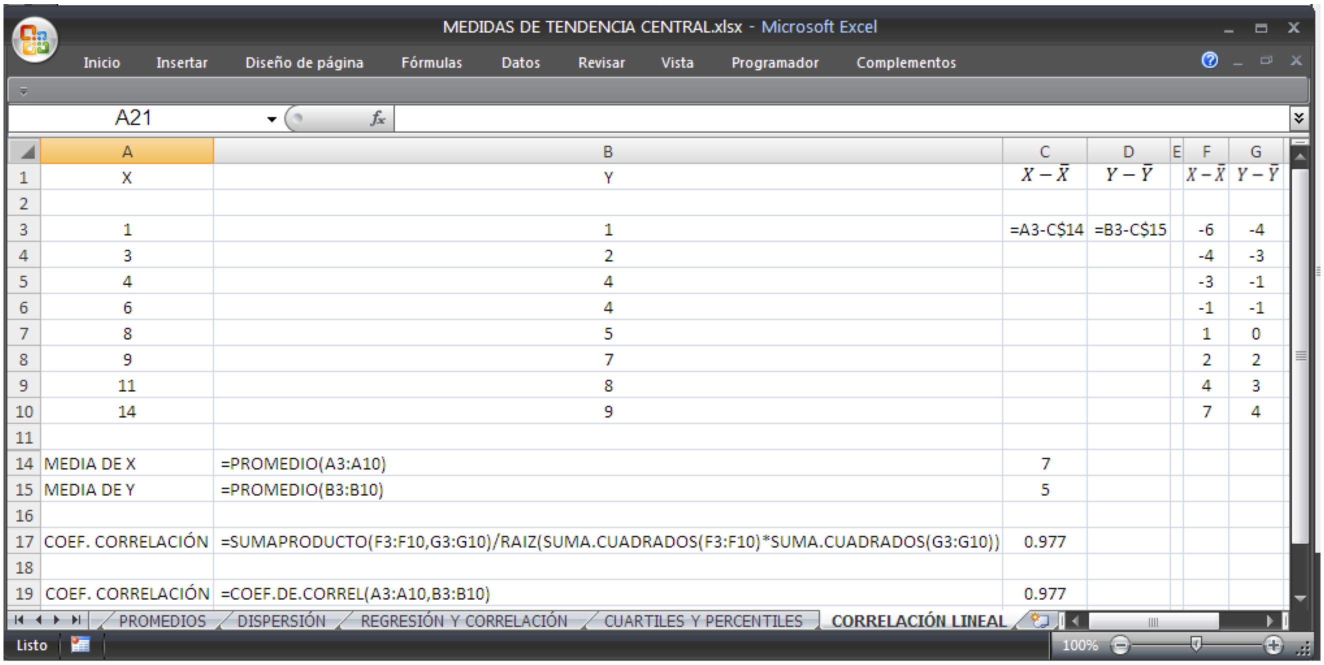
EJEMPLO (Error típico de la estima, medida de correlación entre dos variables)

	A	B	C
1	X	Y	
2			
3	65	68	
4	63	66	
5	67	68	
6	64	65	
7	68	69	
8	62	66	
9	70	68	
10	66	65	
11	68	71	
12	67	67	
13	69	68	
14	71	70	
15			
17			
18	a_0	=INTERSECCION.EJE(B3:B14,A3:A14)	35.825
19	a_1	=PENDIENTE(B3:B14,A3:A14)	0.476
20			
21	NÚMERO DE DATOS	=CONTAR(A3:A14)	12
22			
23	ERROR TÍPICO DE LA ESTIMA	=RAIZ((SUMA.CUADRADOS(B3:B14)-C18*SUMA(B3:B14)-C19*SUMAPRODUCTO(A3:A14,B3:B14))/C21)	1.281
24			
25	ERROR TÍPICO DE LA ESTIMA	=ERROR.TIPICO.XY(B3:B14,A3:A14)	1.404

La función ERROR.TIPICO.XY de EXCEL utiliza una ecuación modificada para medir la dispersión alrededor de la recta de regresión de Y sobre X .

El 68% de los puntos del diagrama de dispersión se encuentran entre las rectas situadas a distancias verticales de $1s_{yx}$ por arriba y debajo de la recta de regresión. El 95% entre las rectas ubicadas a una distancia de $\pm 2s_{yx}$.

EJEMPLO (Coeficiente de correlación, medida de correlación entre dos variables)



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Y	$X-\bar{X}$	$Y-\bar{Y}$		$X-\bar{X}$	$Y-\bar{Y}$
2							
3	1	1	=A3-C$14	=B3-C$15		-6	-4
4	3	2				-4	-3
5	4	4				-3	-1
6	6	4				-1	-1
7	8	5				1	0
8	9	7				2	2
9	11	8				4	3
10	14	9				7	4
11							
14	MEDIA DE X	=PROMEDIO(A3:A10)	7				
15	MEDIA DE Y	=PROMEDIO(B3:B10)	5				
16							
17	COEF. CORRELACIÓN	=SUMAPRODUCTO(F3:F10,G3:G10)/RAIZ(SUMA.CUADRADOS(F3:F10)*SUMA.CUADRADOS(G3:G10))	0.977				
18							
19	COEF. CORRELACIÓN	=COEF.DE.CORREL(A3:A10,B3:B10)	0.977				

La correlación lineal entre las variables es positiva. Están muy relacionadas entre sí puesto que el coeficiente de correlación está cercano a 1. La relación es directamente proporcional.

<u>CAPÍTULO VII</u>

7. PROBABILIDAD Y MUESTREO

7.1. PROBABILIDAD

La probabilidad matemática o teórica de la ocurrencia de un evento A es

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ en\ los\ que\ A\ ocurre}{total\ n\ de\ casos\ posibles\ "igualmente\ factibles"}$$

La probabilidad empírica es la frecuencia relativa de la aparición de A, cuando el total de experimentos es muy grande.

7.2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Es una función que asigna a cada valor de una variable x una probabilidad de ocurrencia p, con la condición de que $\sum p = 1$.

Una distribución de probabilidad puede ser discreta o contínua según que la variable x sea discreta o contínua.

En el caso de una distribución continua el área bajo la curva de frecuecias relativas es igual a uno. De modo que el área entre las rectas $x = a$ y $x = b$ representa la probabilidad de que x se encuentre entre a y b.

7.2.1. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE PROBABILIDAD (Distribución de Bernoulli)

Cada término del desarrollo del binomio $(p + q)^n$ representa la probabilidad de que un suceso ocurra x veces en un total de n ensayos (p es la probabilidad de ocurrencia del suceso en un ensayo y q la probabilidad de no ocurrencia en un ensayo).

Esta función de probabilidad se define como sigue

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad con \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \quad y \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

La media y la desviación típica de la distribución binomial se definen así:

$$Media = \mu = np \qquad y \qquad Desviación\ Típica = \sigma = \sqrt{npq}$$

7.2.2. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una distribución se dice que es normal cuando sus valores se distribuyen de tal forma que su representación gráfica es simétrica y tiene forma de campana.

$$y = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad con \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad donde \quad \mu = media \quad y \quad \sigma = desviación\ típica$$

La desviación de x respecto de la media aritmética μ está expresada en unidades de la desviación típica σ . z se distribuye normalmente con media cero y desviación típica uno.

El área total limitada por la gráfica de ésta función de probabilidad y el eje x es 1. El área bajo la curva entre dos ordenadas $x = a$ y $x = b$ representa la probabilidad de que x se encuentre entre a y b .

Las áreas comprendidas entre $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ son respectivamente 68.27%, 95.45% y 99.73% del área total que es 1.

7.2.3. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Se aplica a la ocurrencia de algún suceso durante alguna unidad de tiempo o espacio. La distribución de Poisson es discreta y se define como sigue:

$$p(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad con \quad x = 0,1,2,\ldots$$

x es el número de ocurrencias del suceso en la unidad de tiempo o espacio, μ es la media y la desviación típica $\sigma = \sqrt{\mu}$.

7.3. MUESTREO

La teoría del muestreo es un estudio de las relaciones existentes entre la población y las muestras que de ella se extraen. Esto se hace para estimar cantidades desconocidas de la población, como por ejemplo la media y la desviación típica.

Las muestras deben ser representativas de la población para que las inferencias hechas sean válidas.

7.4. SELECCIÓN DE MUESTRAS

7.4.1. Muestreo aleatorio simple

Cada muestra o elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionada. Para ello se utilizan números aleatorios.

7.4.2. Muestreo aleatorio estratificado

La población se divide en subpoblaciones y de cada una se selecciona una muestra aleatoria simple.

7.4.3. Muestreo sistemático de 1 en k

Se selecciona aleatoriamente el primero de los k elementos de una población ordenada y luego se hace la selección sistemática de cada k-ésimo elemento después del primero.

7.5. DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Si de una población se extraen todas las muestras posibles de tamaño n y en cada una se calcula un estadístico como por ejemplo la media, desviación típica, mediana, etc, se obtiene una distribución muestral del estadístico.

Si $n > 30$ la muestra se considera grande y las distribuciones muestrales se distribuyen aproximadamente normal. Para $n < 30$ la aproximación normal no es buena y es necesario usar otras distribuciones muestrales como *t de Student* y *Chi-Cuadrado.*

7.5.1. DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

El estadístico en ésta distribución muestral se define como sigue:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n-1}$$

donde $\bar{x}$ y s son la media y desviación típica de la muestra y μ la media poblacional.

Esta distribución muestral se puede utilizar para determinar la media poblacional dentro de ciertos intervalos de confianza. Por ejemplo con el 95% de confianza o probabilidad de 0.95. La media se encuentra entre los límites

$$-t_{0.975} < \frac{\bar{x} - \mu}{s}\sqrt{n-1} < t_{0.975} \qquad o \qquad \bar{x} - t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + t_{0.975}\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

El área total bajo la curva de la distribución t de Student es igual a 1, de donde los valores t son tales que por debajo o por encima de ellos se encuentra un área que representa la probabilidad de encontrar allí a la media poblacional.

La siguiente ecuación define a la distribución t de Student.

$$Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{\frac{N}{2}}}$$

Y_0 es una constante que depende de N.

7.5.2. DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO

De una población que se distribuye normalmente con desviación típica σ se extraen muestras de tamaño n . En cada una se calcula el estadístico

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

Ésta distribución permite estimar la desviación típica poblacional a partir de la desviación típica muestral dentro de unos límites de confianza.

Para un intervalo de confianza del 95% la desviación típica población es

$$\chi^2_{0.025} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.975} \quad de\ donde \quad \frac{s\sqrt{n}}{\chi_{0.975}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\chi_{0.025}}$$

La siguiente ecuación define a la distribución CHI-CUADRADO

$$Y = Y_0\, \chi^{v-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

v representa el número de grados de libertad. Y_0 depende de v .

Cuando $v \geq 30$ se cumple que $\chi^2 = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{2v-1}\right)^2$, z es la variable de la distribución normal.

Prueba Chi-Cuadrado

Se aplica para determinar si los resultados obtenidos de muestras concuerdan con los resultados teóricos o esperados, según las reglas de probabilidad. Se trata de saber si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas.

El estadístico χ^2 es una medida de la diferencia entre las frecuencias observadas y esperadas. Se define así:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \qquad o = frecuencias\ observadas \quad y \quad e = frecuencias\ esperadas$$

Cuando $\chi^2 = 0$ no hay diferencia entre las frecuencias observadas y esperadas. Si $\chi^2 > 0$ las frecuencias no concuerdan. La discrepancia es mayor para valores mayores de χ^2 .

7.6. FUNCIONES DE EXCEL PARA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

7.6.1. CONTAR.SI

Cuenta el número de celdas que en un rango cumplen con una condición.

Sintaxis

CONTAR.SI(rango,condición)

7.6.2. PROBABILIDAD

Determina la probabilidad de que el contenido de una o más celdas se encuentren entre dos límites.
Sintaxis

PROBABILIDAD(rango_x,rango_probabilidad,límite_inferior,límite_superior)

Rango_x son los valores x asociados con las probabilidades.

7.6.3. DISTR.BINOM

Devuelve la probabilidad binomial de una variable discreta.
Sintaxis
DISTR.BINOM(número_éxitos,número_ensayos,probabilidad_éxito,acumulado)

Si **acumulado = verdadero** entonces la frecuencia relativa o probabilidad es acumulada.

7.6.4. COMBINAT

Determina el número de combinaciones que se pueden formar con los elementos de un conjunto.
Sintaxis

COMBINAT(total_elementos,tamaño_combinación)

7.6.5. PERMUTACIONES

Determina el número de permutaciones que se pueden formar con los elementos de un conjunto.

Sintaxis

PERMUTACIONES(total_elementos,tamaño_permutación)

7.6.6. EXP

Devuelve potencias del número natural e .

EXP(número)

Número es la potencia a la que e es elevado.

7.6.7. DISTR.NORM

Genera la distribución normal de probabilidad de una variable continua para la media aritmética y desviación típica indicadas.

Sintaxis

DISTR.NORM(x,media_aritmética,desviación_típica,acumulado)

Si **acumulado = verdadero** la función devuelve la probabilidad o área bajo la curva desde $-\infty$ hasta x normalizada.

7.6.8. DISTR.NORM.ESTAND

Genera la distribución normal de probabilidad acumulada de una variable continua con media aritmética 0 y desviación típica igual a 1.

Sintaxis

DISTR.NORM.ESTAND(x_normalizada)

7.6.9. DISTR.NORM.INV

Determina el valor z que corresponde a la probabilidad, media aritmética y desviación típica indicadas.

Sintaxis

DISTR.NORM.INV(probabilidad,media_aritmética,desviación_típica)

7.6.10. NORMALIZACION

Expresa desviaciones de una variable respecto de su media aritmética en términos de la desviación típica. Normaliza x .

Sintaxis

NORMALIZACION(x,media_aritmética,desviación_típica)

7.6.11. FACT

Calcula el factorial de un número.

Sintaxis

FACT(número)

7.6.12. POISSON

Devuelve elementos de una distribución de Poisson.

Sintaxis

POISSON(x,media_aritmética,acumulado)

7.6.13. ALEATORIO.ENTRE

Genera números aleatorios enteros entre dos límites inclusive.

Sintaxis

ALEATORIO.ENTRE(limite_inferior,límite_superior)

7.6.14. DISTR.T

Calcula probabilidades de una distribución t de Student con el número de grados de libertad y de colas que se indiquen.

Sintaxis

DISTR.T(valor_t,grados_libertad,número_colas)

La función calcula el área bajo la curva en la o las colas a partir de t o –t.

7.6.15. DISTR.T.INV

Determina el valor t que corresponde a una probabilidad o área bajo la curva en las dos colas.

Sintaxis

DISTR.T.INV(probabilidad,grados_libertad)

7.6.16. DISTR.CHI

Calcula la probabilidad de una variable aleatoria continua aplicando la distribución Chi-Cuadrado de una cola.

Sintaxis

DISTR.CHI(valor_variable,grados_libertad)

La función encuentra el área bajo la curva correspondiente a la cola derecha a partir de valor_variable.

7.6.17. PRUEBA.CHI

Encuentra la probabilidad asociada al estadístico χ^2 definido para frecuencias observadas y esperadas.

Sintaxis

PRUEBA.CHI(frecuencias_observadas,frecuencias_esperadas)

7.6.18. PRUEBA.CHI.INV

Determina el valor del estadístico χ^2 para el área bajo la curva o probabilidad indicada.

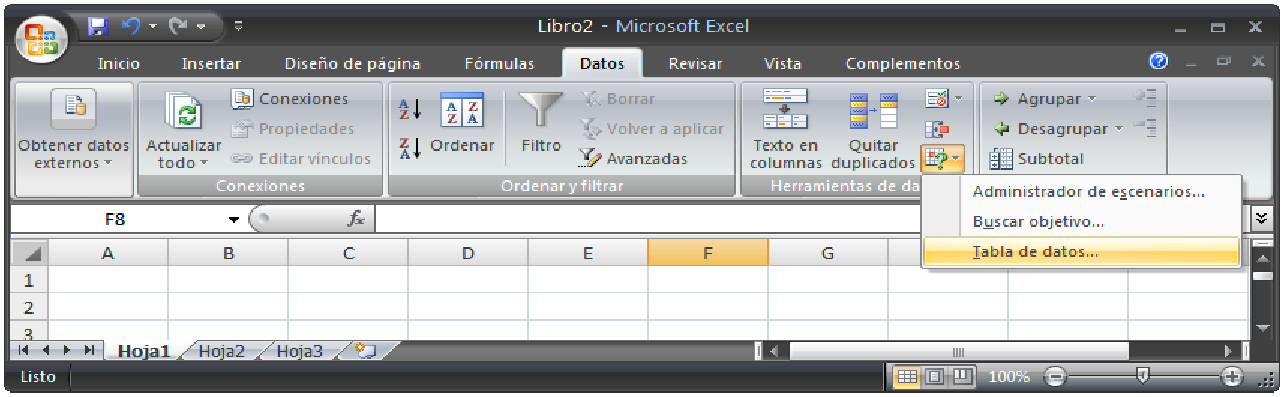
Sintaxis

PRUEBA.CHI.INV(probabilidad,grados_libertad)

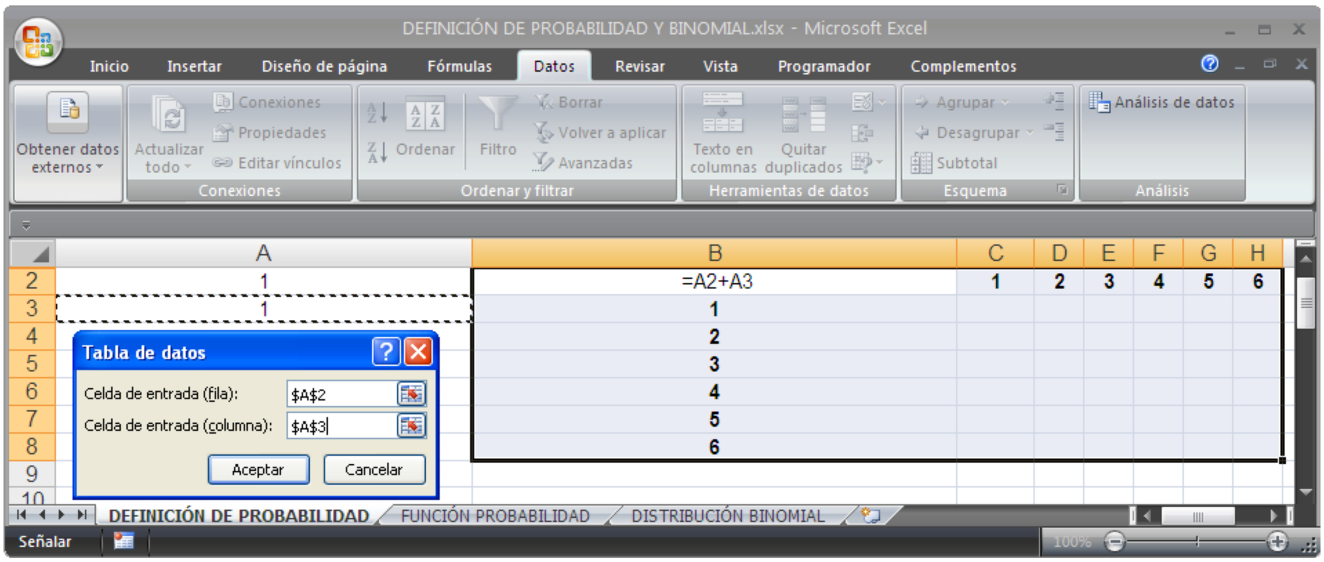
7.7. TABLAS DE DATOS

Permiten hacer cálculos tomando una o dos entradas de datos.

Para crear una tabla de datos se muestra el menú DATOS, en HERRAMIENTAS DE DATOS abrir el menú ANÁLISIS Y SI y elegir TABLA DE DATOS.



Para una tabla de dos entradas de datos se define una **Celda de entrada (fila)** y una **Celda de entrada (columna)**.



En la intersección de la fila y columna de datos se escribe la fórmula que será evaluada.

<u>EJEMPLO</u> (Definición de probabilidad)

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de cualquiera de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad A \text{ y } B \text{ son eventos independientes}$$

Dos eventos son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de cualquiera de ellos no permite la ocurrencia del otro.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \qquad A \text{ y } B \text{ son eventos mutuamente excluyentes}$$

En el ejemplo se calcula la probabilidad de ocurrencia de eventos independientes y mutuamente excluyentes.

El evento consiste en el lanzamiento de un par de dados. La variable es la suma de puntos en el lanzamiento de los dados.

Al rango de celdas C3:H8 se le asignó el nombre de rango **A**. La celda de entrada fila es A2 y la celda de entrada columna A3.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD Y BINOMIAL.xlsx - Microsoft Excel

Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Complementos

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	1	=A2+A3	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3	1	**1**						
4		**2**						
5		**3**						
6		**4**						
7		**5**						
8		**6**						
9								
10								
11		2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
12	1	**1**	2	3	4	5	6	7
13	1	**2**	3	4	5	6	7	8
14		**3**	4	5	6	7	8	9
15		**4**	5	6	7	8	9	10
16		**5**	6	7	8	9	10	11
17		**6**	7	8	9	10	11	12
18								
19								
20	Número de casos posibles	=CONTAR(C12:H17)	36					
21								
22	Probabilidad de que la suma sea 7	=CONTAR.SI(A,"=7")/C20	0.167					
23								
24	Probabilidad de que la suma sea 5 ó 9	=CONTAR.SI(A,"=5")/C20+CONTAR.SI(A,"=9")/C20	0.222					
25								
26	Probabilidad de que la suma sea 4 y luego 3	=CONTAR.SI(A,"=4")/C20*CONTAR.SI(A,"=3")/C20	0.005					
27								

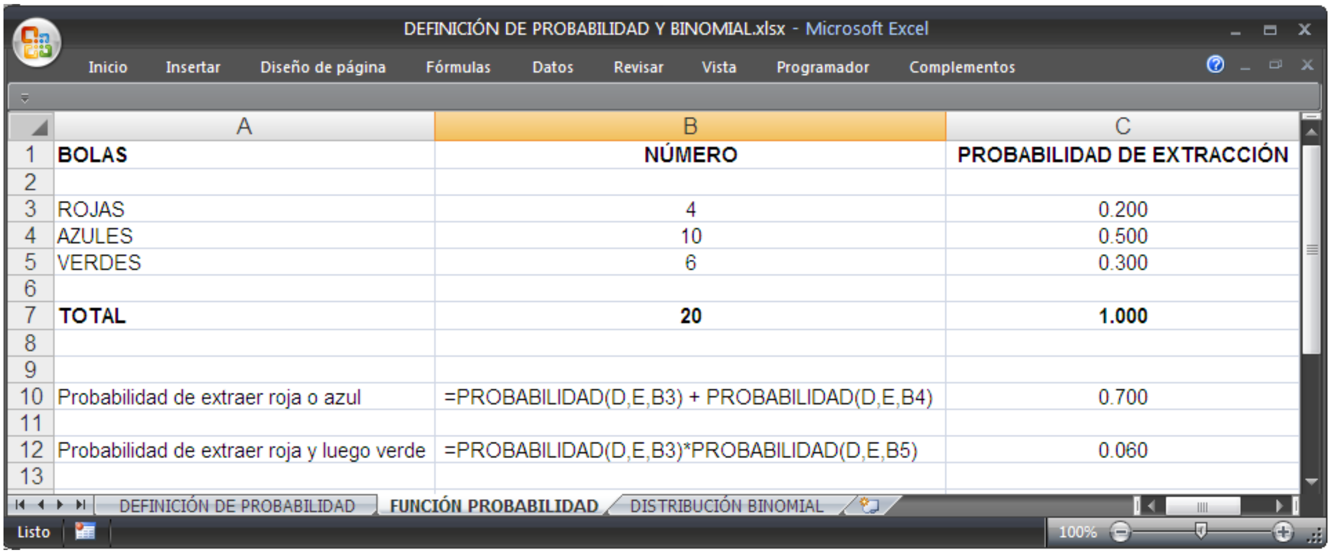
DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD / FUNCIÓN PROBABILIDAD / DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Listo 100%

<u>EJEMPLO</u> (Función PROBABILIDAD)

El cálculo de probabilidades de eventos mutuamente excluyentes e independientes se hace utilizando la función PROBABILIDAD. Ésta requiere que la suma de las probabilidades sea 1.

El evento consiste en extraer bolas de una bolsa que contiene bolas rojas, azules y verdes.

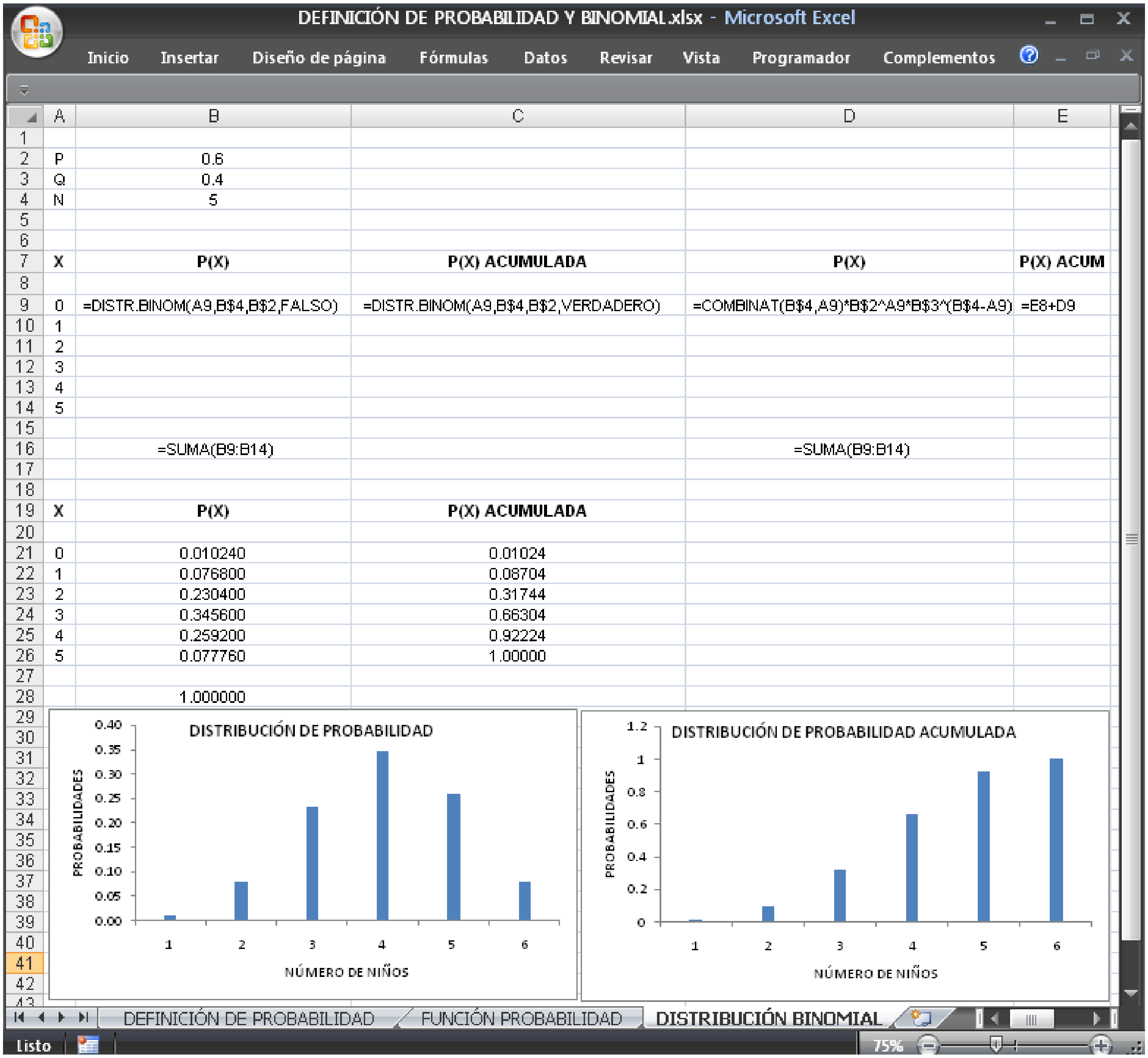


	A	B	C
1	**BOLAS**	**NÚMERO**	**PROBABILIDAD DE EXTRACCIÓN**
2			
3	ROJAS	4	0.200
4	AZULES	10	0.500
5	VERDES	6	0.300
6			
7	**TOTAL**	**20**	**1.000**
8			
9			
10	Probabilidad de extraer roja o azul	=PROBABILIDAD(D,E,B3) + PROBABILIDAD(D,E,B4)	0.700
11			
12	Probabilidad de extraer roja y luego verde	=PROBABILIDAD(D,E,B3)*PROBABILIDAD(D,E,B5)	0.060
13			

Los rangos de celdas B3:B5 y C3:C5 tienen nombres **D** y **E**, respectivamente.

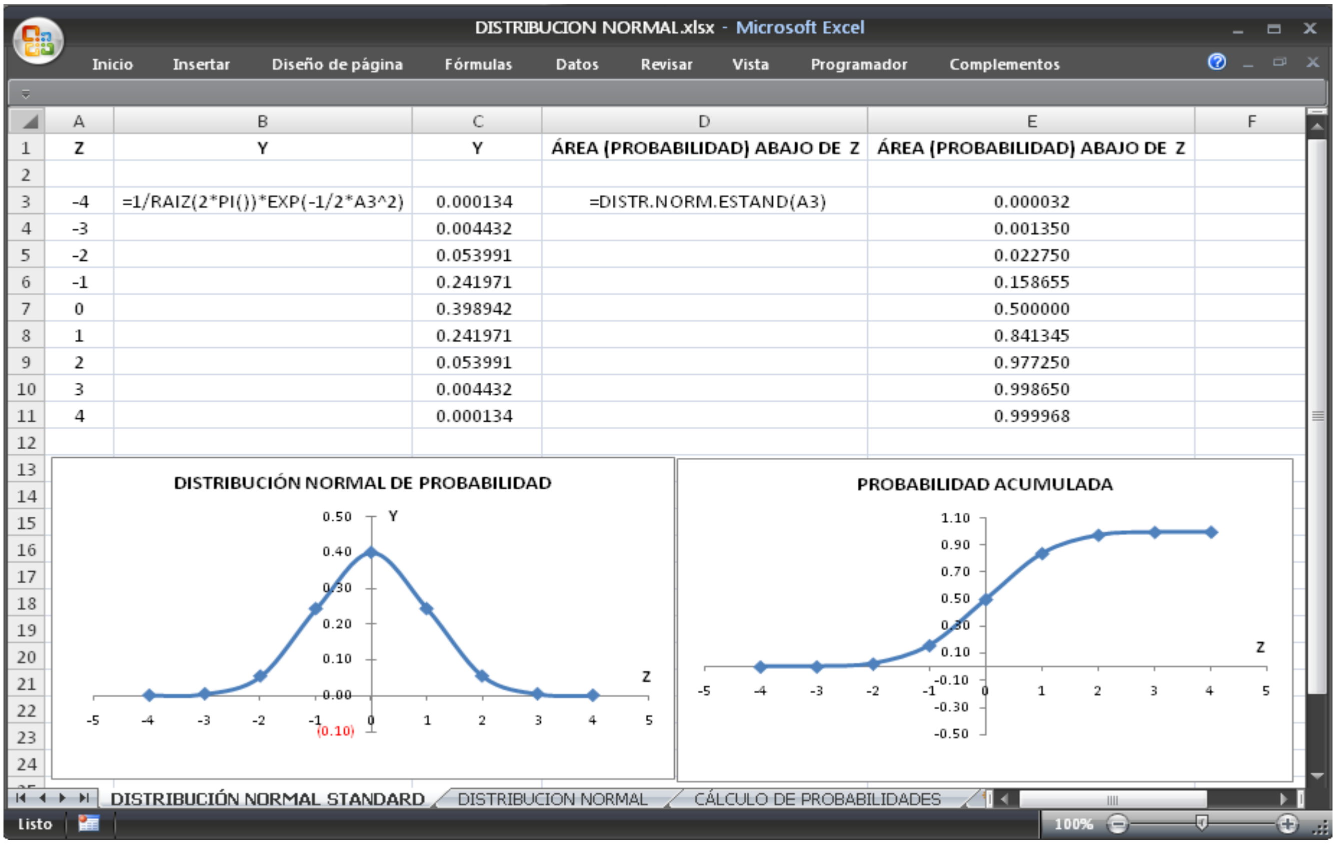
EJEMPLO (Distribución Binomial)

En una ciudad la probabilidad de nacimiento de niño es del 60% y de niña 40%. La variable X denota el número de niños en familias con 5 hijos.



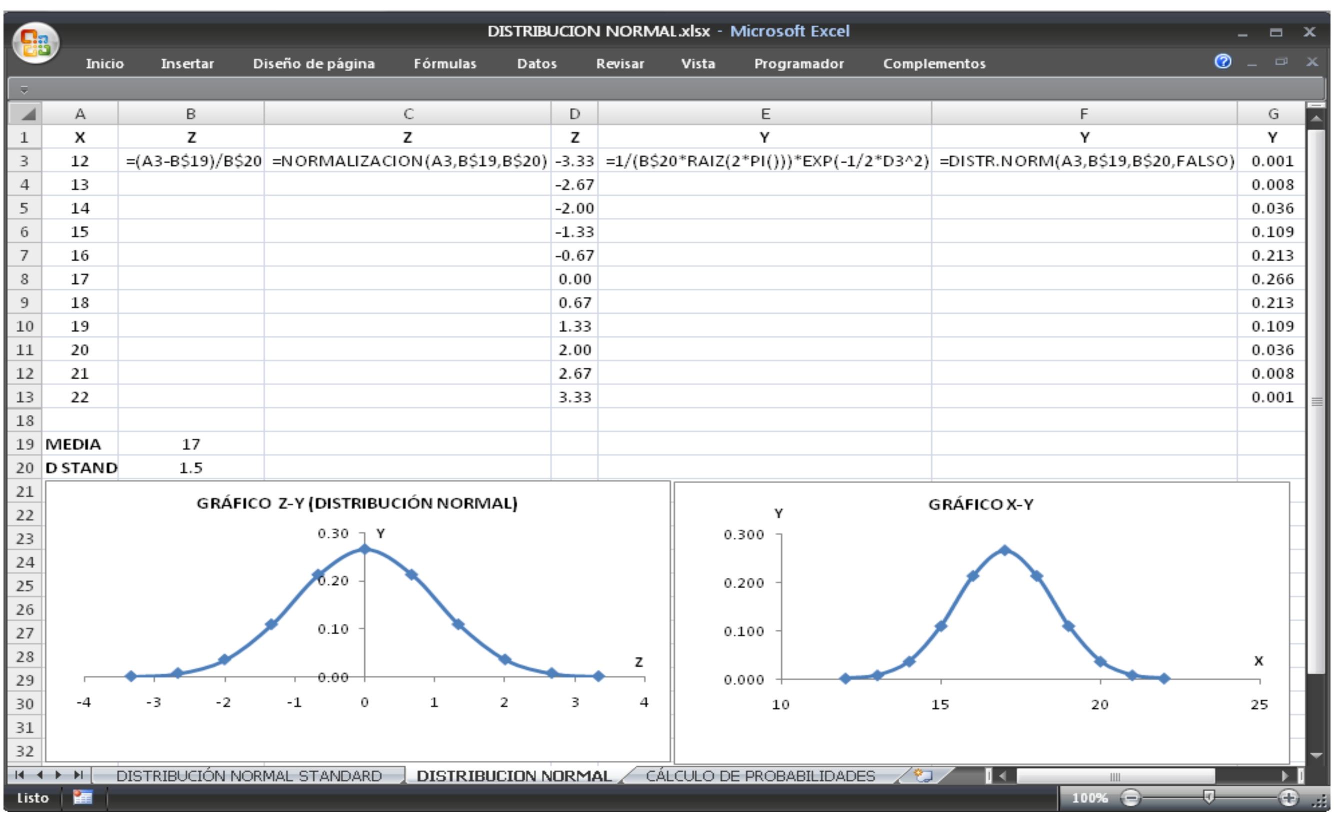
	A	B	C	D	E
1					
2	P	0.6			
3	Q	0.4			
4	N	5			
5					
6					
7	X	P(X)	P(X) ACUMULADA	P(X)	P(X) ACUM
8					
9	0	=DISTR.BINOM(A9,B$4,B$2,FALSO)	=DISTR.BINOM(A9,B$4,B$2,VERDADERO)	=COMBINAT(B$4,A9)*B$2^A9*B$3^(B$4-A9)	=E8+D9
10	1				
11	2				
12	3				
13	4				
14	5				
15					
16		=SUMA(B9:B14)		=SUMA(B9:B14)	
17					
18					
19	X	P(X)	P(X) ACUMULADA		
20					
21	0	0.010240	0.01024		
22	1	0.076800	0.08704		
23	2	0.230400	0.31744		
24	3	0.345600	0.66304		
25	4	0.259200	0.92224		
26	5	0.077760	1.00000		
27					
28		1.000000			

<u>EJEMPLO</u> (Distribución Normal Standard)



	A	B	C	D	E
1	Z	Y	Y	ÁREA (PROBABILIDAD) ABAJO DE Z	ÁREA (PROBABILIDAD) ABAJO DE Z
2					
3	-4	=1/RAIZ(2*PI())*EXP(-1/2*A3^2)	0.000134	=DISTR.NORM.ESTAND(A3)	0.000032
4	-3		0.004432		0.001350
5	-2		0.053991		0.022750
6	-1		0.241971		0.158655
7	0		0.398942		0.500000
8	1		0.241971		0.841345
9	2		0.053991		0.977250
10	3		0.004432		0.998650
11	4		0.000134		0.999968

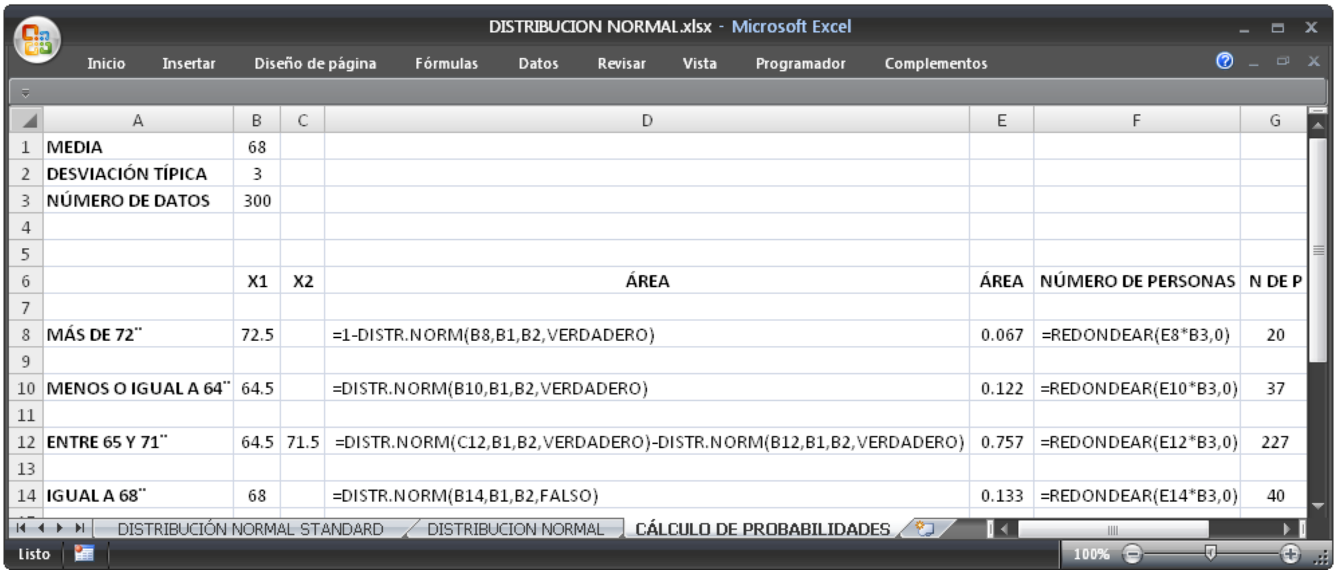
EJEMPLO (Distribución Normal, la variable X está normalizada)



	A	B	C	D	E	F	G
1	X	Z	Z	Z	Y	Y	Y
3	12	=(A3-B$19)/B$20	=NORMALIZACION(A3,B$19,B$20)	-3.33	=1/(B$20*RAIZ(2*PI()))*EXP(-1/2*D3^2)	=DISTR.NORM(A3,B$19,B$20,FALSO)	0.001
4	13			-2.67			0.008
5	14			-2.00			0.036
6	15			-1.33			0.109
7	16			-0.67			0.213
8	17			0.00			0.266
9	18			0.67			0.213
10	19			1.33			0.109
11	20			2.00			0.036
12	21			2.67			0.008
13	22			3.33			0.001
18							
19	MEDIA	17					
20	D STAND	1.5					

EJEMPLO (Áreas bajo la curva normal)

Las alturas de 300 estudiantes se distribuyen normalmente con media aritmética de 68 pulgadas y desviación típica de 3 pulgadas. Se trata de hallar el número de estudiantes cuya estatura es como se indica.



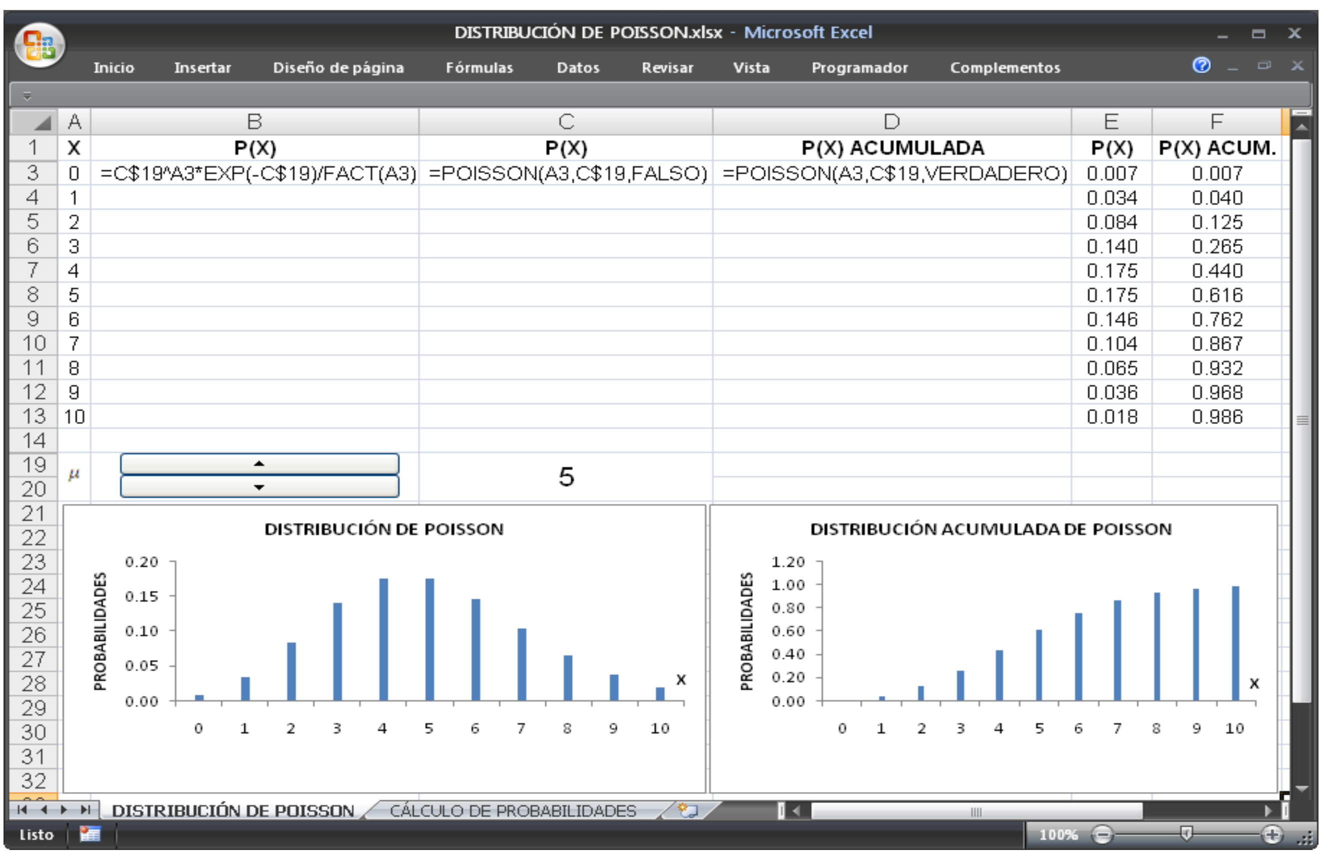
DISTRIBUCION NORMAL.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	MEDIA	68					
2	DESVIACIÓN TÍPICA	3					
3	NÚMERO DE DATOS	300					
4							
5							
6		X1	X2	ÁREA	ÁREA	NÚMERO DE PERSONAS	N DE P
7							
8	MÁS DE 72"	72.5		=1-DISTR.NORM(B8,B1,B2,VERDADERO)	0.067	=REDONDEAR(E8*B3,0)	20
9							
10	MENOS O IGUAL A 64"	64.5		=DISTR.NORM(B10,B1,B2,VERDADERO)	0.122	=REDONDEAR(E10*B3,0)	37
11							
12	ENTRE 65 Y 71"	64.5	71.5	=DISTR.NORM(C12,B1,B2,VERDADERO)-DISTR.NORM(B12,B1,B2,VERDADERO)	0.757	=REDONDEAR(E12*B3,0)	227
13							
14	IGUAL A 68"	68		=DISTR.NORM(B14,B1,B2,FALSO)	0.133	=REDONDEAR(E14*B3,0)	40

DISTRIBUCIÓN NORMAL STANDARD / DISTRIBUCION NORMAL / CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EJEMPLO (Distribución de Poisson)

El **control de número** permite mostrar la distribución de Poisson para diferentes medias aritméticas. Está vinculado a la celda C19.



DISTRIBUCIÓN DE POISSON.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1	X	P(X)	P(X)	P(X) ACUMULADA	P(X)	P(X) ACUM.
3	0	=C$19^A3*EXP(-C$19)/FACT(A3)	=POISSON(A3,C$19,FALSO)	=POISSON(A3,C$19,VERDADERO)	0.007	0.007
4	1				0.034	0.040
5	2				0.084	0.125
6	3				0.140	0.265
7	4				0.175	0.440
8	5				0.175	0.616
9	6				0.146	0.762
10	7				0.104	0.867
11	8				0.065	0.932
12	9				0.036	0.968
13	10				0.018	0.986
14						
19	μ		5			
20						

EJEMPLO (Distribución de Poisson, cálculo de probabilidades)

El 3% de las bombillas fabricadas por una compañía son defectuosas. La variable X representa el número bombillas defectuosas en una muestra de tamaño 100.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON - Microsoft Excel

	A	B	C	D
1	n	100		
2	p	3%		
3				
4	μ	=B1*B2	3	
5				
6				
7	**X (Número de bombillas defectuosas)**	**P(X)**	**P(X)**	**P(X)**
8				
9	0	=C$4^A9*EXP(-C$4)/FACT(A9)	=POISSON(A9,C$4,FALSO)	0.049787
10	1			0.149361
11	2			0.224042
12	3			0.224042
13	4			0.168031
14	5			0.100819

DISTRIBUCIÓN DE POISSON | CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EJEMPLO (Muestreo Aleatorio Simple)

De la población se extrae una muestra de tamaño 5, aplicando Muestreo Aleatorio Simple.

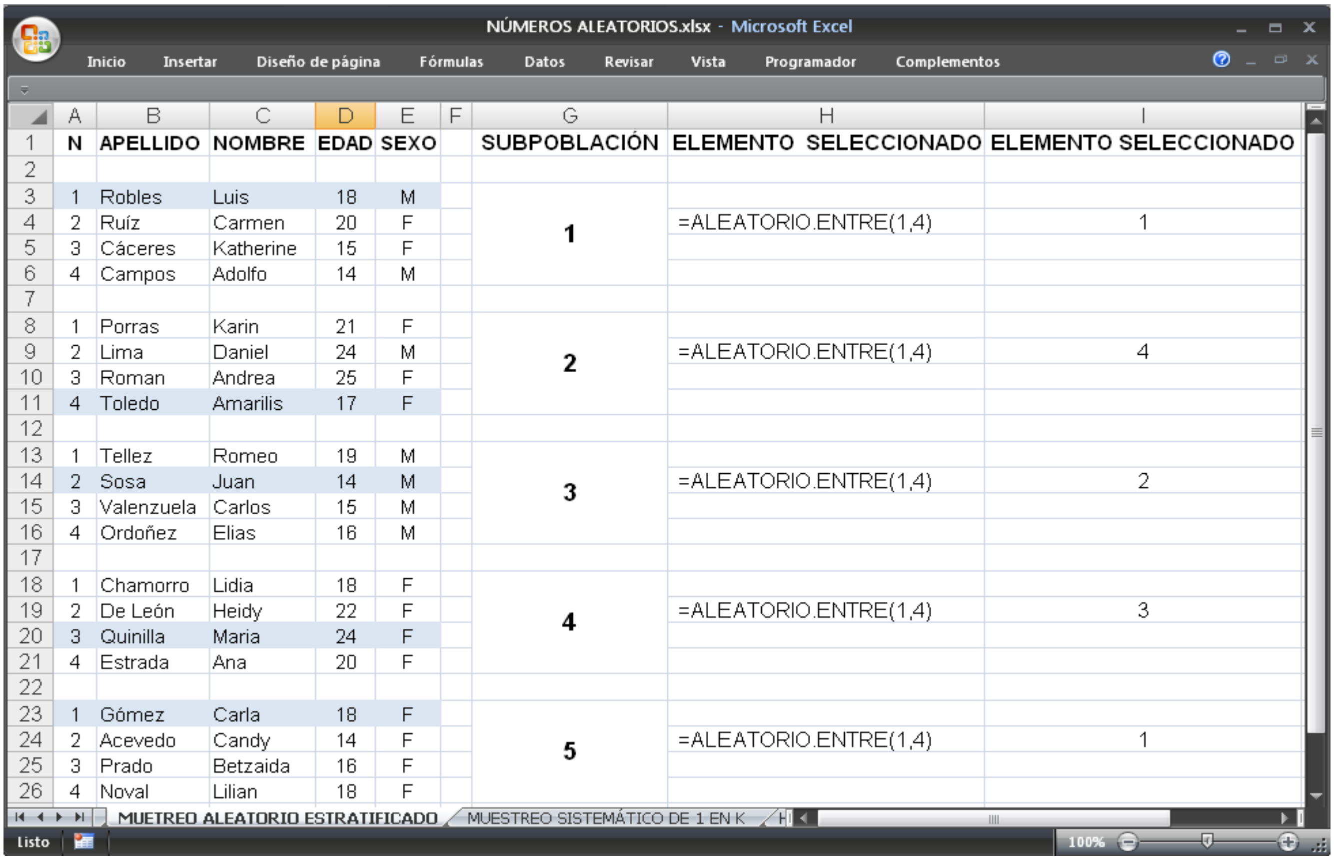
NÚMEROS ALEATORIOS.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	**N**	**APELLIDO**	**NOMBRE**	**EDAD**	**SEXO**		**Elementos de la muestra**
2							
3	1	Robles	Luis	18	M		=ALEATORIO.ENTRE(1,20)
4	2	Ruíz	Carmen	20	F		
5	3	Cáceres	Katherine	15	F		
6	4	Campos	Adolfo	14	M		
7	5	Porras	Karin	21	F		
8	6	Lima	Daniel	24	M		
9	7	Roman	Andrea	25	F		
10	8	Toledo	Amarilis	17	F		**Elementos de la muestra**
11	9	Tellez	Romeo	19	M		
12	10	Sosa	Juan	14	M		11
13	11	Valenzuela	Carlos	15	M		16
14	12	Ordoñez	Elias	16	M		1
15	13	Chamorro	Lidia	18	F		6
16	14	De León	Heidy	22	F		7
17	15	Quinilla	Maria	24	F		
18	16	Estrada	Ana	20	F		
19	17	Gómez	Carla	18	F		
20	18	Acevedo	Candy	14	F		
21	19	Prado	Betzaida	16	F		
22	20	Noval	Lilian	18	F		
23							

MUETREO ALEATORIO SIMPLE | MUETREO ALEATORIO E

EJEMPLO (Muestreo Aleatorio Estratificado)

La población se divide en subpoblaciones de tamaño 4, luego de cada una se extrae un elemento usando muestreo aleatorio simple.



N	APELLIDO	NOMBRE	EDAD	SEXO		SUBPOBLACIÓN	ELEMENTO SELECCIONADO	ELEMENTO SELECCIONADO
1	Robles	Luis	18	M				
2	Ruíz	Carmen	20	F		1	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	1
3	Cáceres	Katherine	15	F				
4	Campos	Adolfo	14	M				
1	Porras	Karin	21	F				
2	Lima	Daniel	24	M		2	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	4
3	Roman	Andrea	25	F				
4	Toledo	Amarilis	17	F				
1	Tellez	Romeo	19	M				
2	Sosa	Juan	14	M		3	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	2
3	Valenzuela	Carlos	15	M				
4	Ordoñez	Elias	16	M				
1	Chamorro	Lidia	18	F				
2	De León	Heidy	22	F		4	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	3
3	Quinilla	Maria	24	F				
4	Estrada	Ana	20	F				
1	Gómez	Carla	18	F				
2	Acevedo	Candy	14	F		5	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	1
3	Prado	Betzaida	16	F				
4	Noval	Lilian	18	F				

EJEMPLO (Muestreo Sistemático de 1 en k)

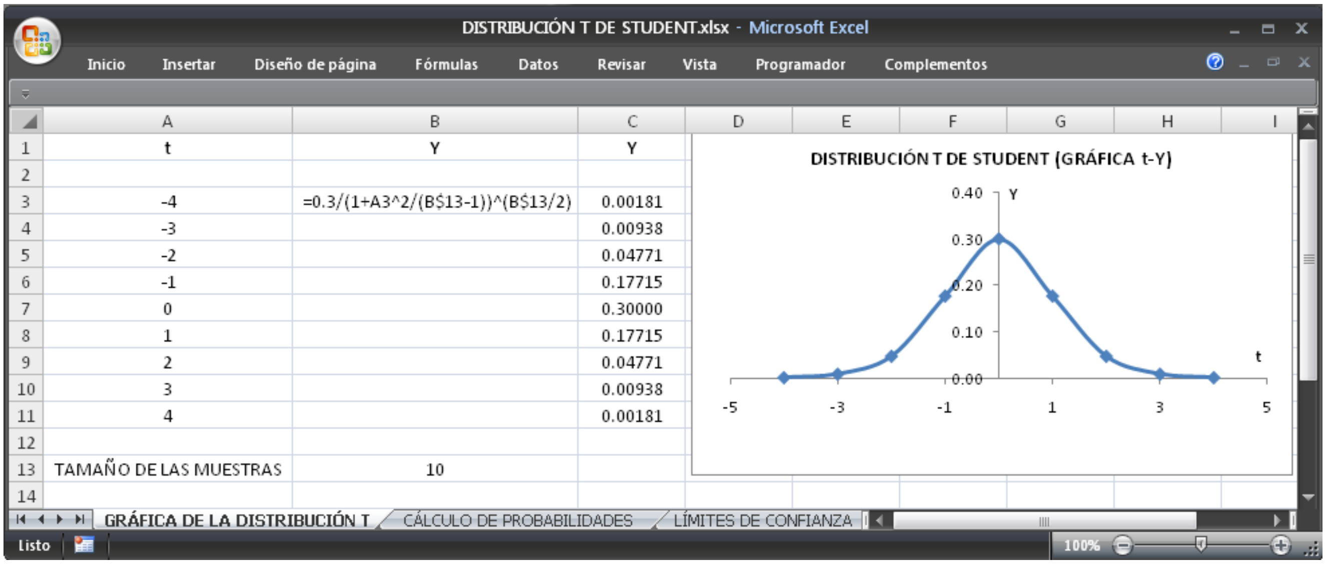
Se selecciona aleatoriamente el primero de los k elementos de la población ordenada y luego se hace la selección sistemática de cada k-ésimo elemento después del primero.

N	APELLIDO	NOMBRE	EDAD	SEXO				
1	Robles	Luis	18	M		K	=ALEATORIO.ENTRE(1,4)	3
2	Ruíz	Carmen	20	F				
3	Cáceres	Katherine	15	F				
4	Campos	Adolfo	14	M				
5	Porras	Karin	21	F				
6	Lima	Daniel	24	M				
7	Roman	Andrea	25	F				
8	Toledo	Amarilis	17	F				
9	Tellez	Romeo	19	M				
10	Sosa	Juan	14	M				
11	Valenzuela	Carlos	15	M				
12	Ordoñez	Elias	16	M				
13	Chamorro	Lidia	18	F				
14	De León	Heidy	22	F				
15	Quinilla	Maria	24	F				
16	Estrada	Ana	20	F				
17	Gómez	Carla	18	F				
18	Acevedo	Candy	14	F				
19	Prado	Betzaida	16	F				
20	Noval	Lilian	18	F				

Las celdas sombreadas contienen los elementos de la muestra.

<u>EJEMPLO</u> (Distribución t de Student)

Y representa la probabilidad para cada valor **t** de la distribución muestral.



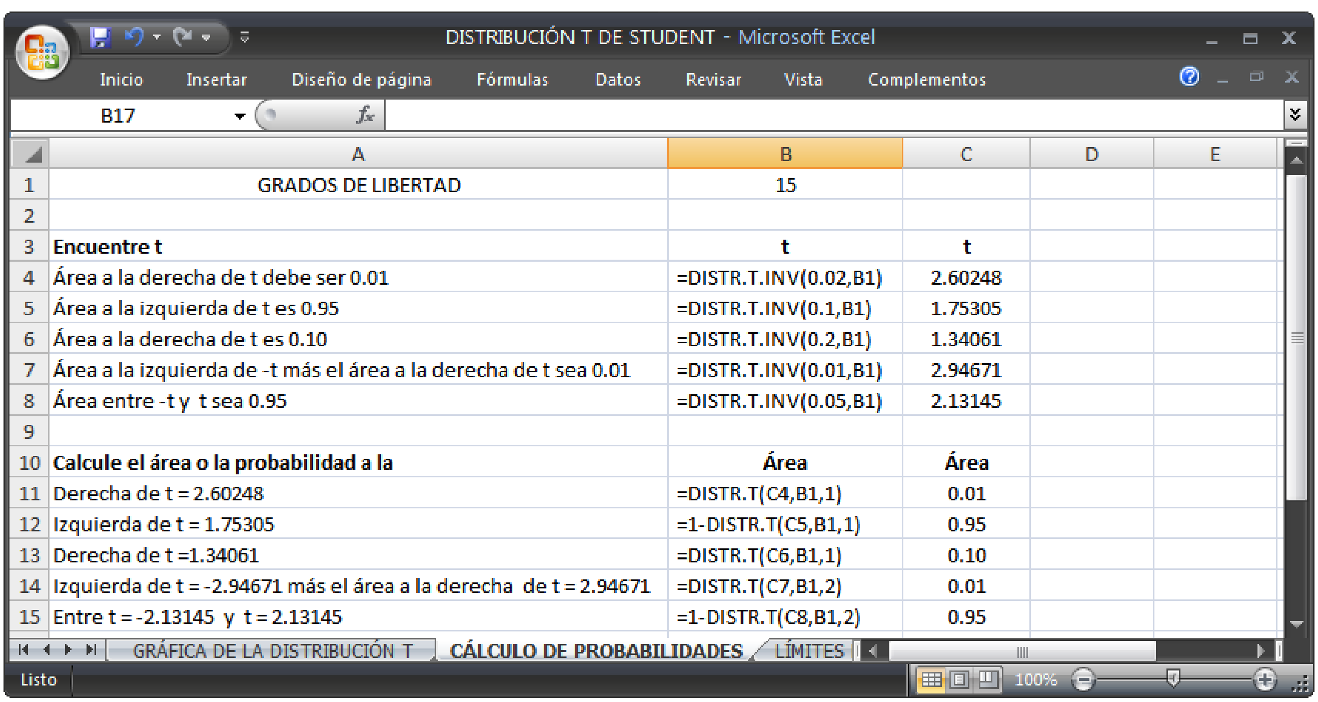
DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C
1	t	Y	Y
2			
3	-4	=0.3/(1+A3^2/(B$13-1))^(B$13/2)	0.00181
4	-3		0.00938
5	-2		0.04771
6	-1		0.17715
7	0		0.30000
8	1		0.17715
9	2		0.04771
10	3		0.00938
11	4		0.00181
12			
13	TAMAÑO DE LAS MUESTRAS	10	

<u>EJEMPLO</u> (Distribuciòn t de Student, cálculo de probabilidades)

Se debe tener presente que la función DISTR.T.INV devuelve el valor t de la distribución t de Student con dos colas. La probabilidad o área parámetro de la función se distribuye en las dos colas.

En la función DISTR.T si el número de colas es 1, el área es asociada a la cola derecha.



DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT - Microsoft Excel

	A	B	C
1	GRADOS DE LIBERTAD	15	
2			
3	**Encuentre t**	**t**	**t**
4	Área a la derecha de t debe ser 0.01	=DISTR.T.INV(0.02,B1)	2.60248
5	Área a la izquierda de t es 0.95	=DISTR.T.INV(0.1,B1)	1.75305
6	Área a la derecha de t es 0.10	=DISTR.T.INV(0.2,B1)	1.34061
7	Área a la izquierda de -t más el área a la derecha de t sea 0.01	=DISTR.T.INV(0.01,B1)	2.94671
8	Área entre -t y t sea 0.95	=DISTR.T.INV(0.05,B1)	2.13145
9			
10	**Calcule el área o la probabilidad a la**	**Área**	**Área**
11	Derecha de t = 2.60248	=DISTR.T(C4,B1,1)	0.01
12	Izquierda de t = 1.75305	=1-DISTR.T(C5,B1,1)	0.95
13	Derecha de t =1.34061	=DISTR.T(C6,B1,1)	0.10
14	Izquierda de t = -2.94671 más el área a la derecha de t = 2.94671	=DISTR.T(C7,B1,2)	0.01
15	Entre t = -2.13145 y t = 2.13145	=1-DISTR.T(C8,B1,2)	0.95

EJEMPLO (Distribuciòn t de Student, intervalos de confianza)

Cinco medidas del tiempo de reacción de un individuo a cierto estímulo fueron registradas como 0.28, 0.30, 0.27, 0.33 y 0.31 segundos. Hallar los límites de confianza del 95% y 99% del tiempo de reacción del individuo.

DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X										
2											
3	0.28										
4	0.30										
5	0.27										
6	0.33										
7	0.31										
8											
10	N	=CONTAR(A3:A7)	5								
11	GRADOS DE LIBERTAD	=B10-1	4								
12											
13	MEDIA ARITMÉTICA	=PROMEDIO(A3:A7)	0.29800								
14	DESVIACIÓN TÍPICA	=DESVESTP(A3:A7)	0.02135								
15											
16						LÍMITES DE CONFIANZA			LÍMITES DE CONFIANZA		
17	t (95%)	=DISTR.T.INV(0.05,C11)	2.77645		=C13-C17*(C14/RAIZ(C10-1))	-	=C13+C17*(C14/RAIZ(C10-1))		0.26836	-	0.32764
18	t (99%)	=DISTR.T.INV(0.01,C11)	4.60409		=C13-C18*(C14/RAIZ(C10-1))	-	=C13+C18*(C14/RAIZ(C10-1))		0.24884	-	0.34716

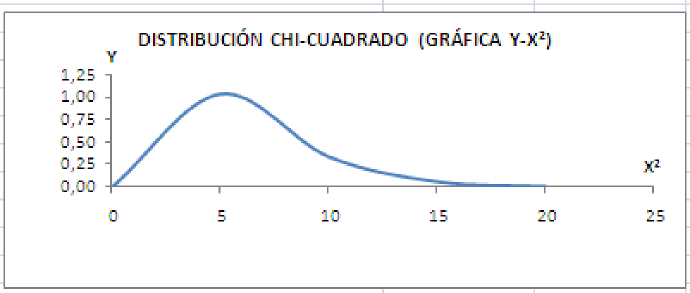
CÁLCULO DE PROBABILIDADES | LÍMITES DE CONFIANZA

EJEMPLO (Distribución Chi-Cuadrado)

La función DISTR.CHI devuelve la probabilidad de una variable aleatoria aplicando la distribución CHI-CUADRADO de una cola. El área corresponde a la cola derecha.

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1	Y	Y	χ^2	ÁREA A LA DERECHA DE χ^2	ÁREA A LA DERECHA DE χ^2
2					
3	=0.5*C3^(1/2*(C$10-2))*EXP(-1/2*C3)	0,00000	0	=DISTR.CHI(C3,C$10)	1,00000
4		1,02606	5		0,54381
5		0,33690	10		0,12465
6		0,06222	15		0,02026
7		0,00908	20		0,00277
9					
10	Grados de libertad		6		



DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO | INTERVALOS DE CONFIANZA

<u>EJEMPLO</u> (Distribuciòn Chi-Cuadrado, intervalos de confianza)

La desviación típica de las duraciones de una muestra de 200 bombillas es de 100 horas. Encontrar los límites de confianza del 95% y 99% para la desviación típica de la población.

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO.xlsx - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1	**N**	200		$\chi_{0.975}$	=RAIZ(1/2*(DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.975)+RAIZ(2*B3-1))^2)	15.47
2	**DESVIACIÓN TIPICA**	100		$\chi_{0.025}$	=RAIZ(1/2*(DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.025)+RAIZ(2*B3-1))^2)	12.70
3	**GRADOS DE LIBERTAD**	199		$\chi_{0.995}$	=RAIZ(1/2*(DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.995)+RAIZ(2*B3-1))^2)	15.91
4				$\chi_{0.005}$	=RAIZ(1/2*(DISTR.NORM.ESTAND.INV(0.005)+RAIZ(2*B3-1))^2)	12.27
5						
6						
7	**I. DE CONFIANZA DEL 95%**	=B2*RAIZ(B1)/F1	-	=B2*RAIZ(B1)/F2		
8	**I. DE CONFIANZA DEL 99%**	=B2*RAIZ(B1)/F3	-	=B2*RAIZ(B1)/F4		
9						
10	**I. DE CONFIANZA DEL 95%**	91.39	-	111.33		
11	**I. DE CONFIANZA DEL 99%**	88.89	-	115.28		

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO | INTERVALOS DE CONFIANZA | PRUEBA CHI-CUADRADO | Hoja5

<u>EJEMPLO</u> (Prueba Chi-Cuadrado)

Una moneda es lanzada 200 veces y se observan 115 caras y 85 cruces. Ensayar la hipótesis de que la moneda está bien hecha con un nivel de significación del 0.05.

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E	F
1		**FRECUENCIA OBSERVADA**	**FRECUENCIA ESPERADA**			
2	**CARAS**	115	100			
3	**CRUCES**	85	100			
4						
5	**GRADOS DE LIBERTAD**	1				
6						
7						
8	**ÁREA A LA DERECHA DE** χ^2	=PRUEBA.CHI(B2:B3,C2:C3)	0.03389			
9						
10	$\chi^2_{0.95}$	3.84				
11						
12	χ^2	=PRUEBA.CHI.INV(B8,B5)	=(B2-C2)^2/C2+(B3-C3)^2/C3	4.50		
13						

DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO | INTERVALOS DE CONFIANZA | PRUEBA CHI-CUADRADO

Puesto $\chi^2 > \chi^2_{0.95}$ la hipótesis tiene que ser rechazada.

CAPÍTULO VIII

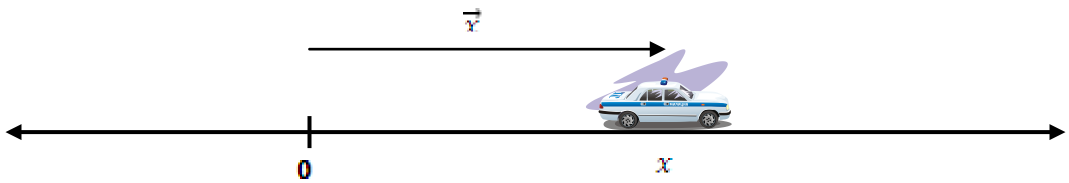
8. CINEMÁTICA

La descripción del movimiento en términos del espacio y tiempo, sin atender las causas que lo producen o modifican, se llama Cinemática.

8.1. ALGUNAS CANTIDADES FÍSICAS QUE DESCRIBEN EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO

8.1.1. Posición

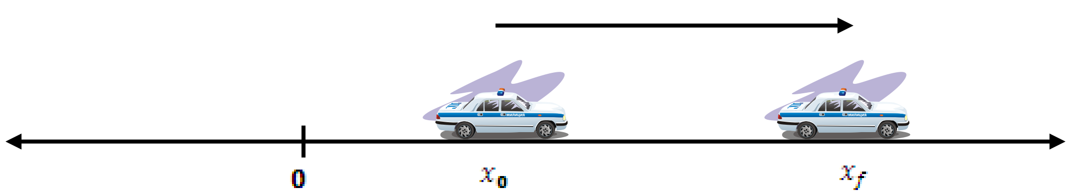
Es la ubicación de un cuerpo en el espacio y tiempo. Si el movimiento ocurre a lo largo el eje x , la posición está dada por la coordenada x .



8.1.2. Desplazamiento

Un cuerpo se desplaza cuando se mueve de un punto a otro. Entonces el desplazamiento es el cambio de posición.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x_f} - \vec{x_o}$$



8.1.3. Velocidad Promedio

La velocidad promedio de una partícula es el cambio en su posición correspondiente a un cambio de tiempo.

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x_f} - \vec{x_0}}{t_f - t_0}$$

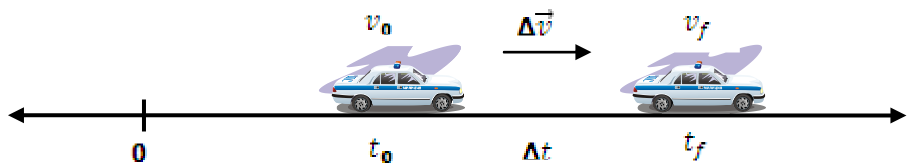
La velocidad instantánea es el límite de la velocidad promedio cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Es la velocidad en un determinado instante de tiempo.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En la gráfica de una ecuación que relaciona a la posición con el tiempo, la velocidad promedio entre dos puntos es la pendiente de la recta secante que une a los puntos. Y la velocidad instantánea en un punto de la gráfica es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

8.1.4. Aceleración Promedio

Una partícula tiene aceleración cuando su velocidad cambia al cambiar el tiempo. Entonces la aceleración promedio es el cambio de velocidad correspondiente a un cambio de tiempo.



$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_f} - \vec{v_o}}{t_f - t_0}$$

La aceleración instantánea es el límite de la aceleración promedio cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

En la gráfica de la ecuación que relaciona a la velocidad con el tiempo, la velocidad promedio entre dos puntos es la pendiente de la recta que une a los puntos. Y la velocidad instantánea en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

8.2. MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON VELOCIDAD CONSTANTE

La trayectoria es una línea recta y la velocidad es constante. Un cuerpo que tiene movimiento rectilíneo uniforme recorre distancias iguales en intervalos iguales de tiempo.

Ecuación fundamental del MRU

$$\Delta x = vt$$

8.3. MOVIMIENTO RECTILÍNEO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

La trayectoria es una línea recta y la magnitud de la velocidad cambia uniformemente, es decir que la aceleración es constante.

Un cuerpo cae libremente cuando su desplazamiento está dirigido hacia el centro de la Tierra y es ocasionado únicamente por la fuerza de atracción gravitacional.

La aceleración producida por la fuerza de gravedad sobre un cuerpo en caída libre recibe el nombre de gravedad ($a = -g$) . En las cercanías de la superficie terreste $\tilde{g} = 9.8\frac{m}{s^2}$ y disminuye cuando aumenta la altura.

Para cuerpos en caída libre cerca de la superficie terreste el movimiento se puede considerar como rectilíneo uniformemente variado.

<u>Ecuaciones fundamentales del MRUV</u>

$$v_f = v_o + at \qquad v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \qquad \Delta x = v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

<u>Ecuaciones fundamentales de la caída libre</u>

$$v_f = v_o - gt \qquad v_f^2 = v_0^2 - 2g\Delta y \qquad \Delta y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

8.4. MOVIMIENTO PARABÓLICO

El lanzamiento de proyectiles o tiro parabólico es un movimiento en dos dimensiones. La trayectoria es una parábola.

Se supone que el lanzamiento se hace en el vacío y debido a ello la componente horizontal de la velocidad es constante mientras que la magnitud de la componente vertical varía una cantidad por segundo igual a g .

Para facilitar el estudio del movimiento parabólico se divide en horizontal con velocidad constante y vertical con aceleración constante g .

<u>Ecuaciones fundamentales del movimiento parabólico</u>

<u>Componentes de la velocidad inicial</u>

$$v_{0x} = v_0 cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 sen\theta$$

<u>Para el movimiento horizontal</u>

$$v_x = v_{0x} \qquad \Delta x = v_x t$$

<u>Para el movimiento vertical</u>

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

$$\Delta y = v_{0y}t - \frac{1}{2gt^2}$$

Velocidad en el movimiento parabólico

$$v = \pm\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad tg\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

8.5. FUNCIONES DE EXCEL USADAS EN CINEMÁTICA

8.5.1. RADIANES

Convierte grados en radianes.

Sintaxis

RADIANES(ángulo)

8.5.2. SENO

Devuelve el seno de un ángulo expresado en radianes.

Sintaxis

SENO(ángulo)

8.5.3. COS

Devuelve el coseno de un ángulo expresado en radianes.

Sintaxis

COS(ángulo)

8.5.4. TAN

Cálcula la tangente de un ángulo expresado en radianes.

Sintaxis

TAN(ángulo)

8.5.5. ATAN

Calcula el inverso de la tangente de un número real. La imagen de la función queda expresada en radianes.

<u>Sintaxis</u>

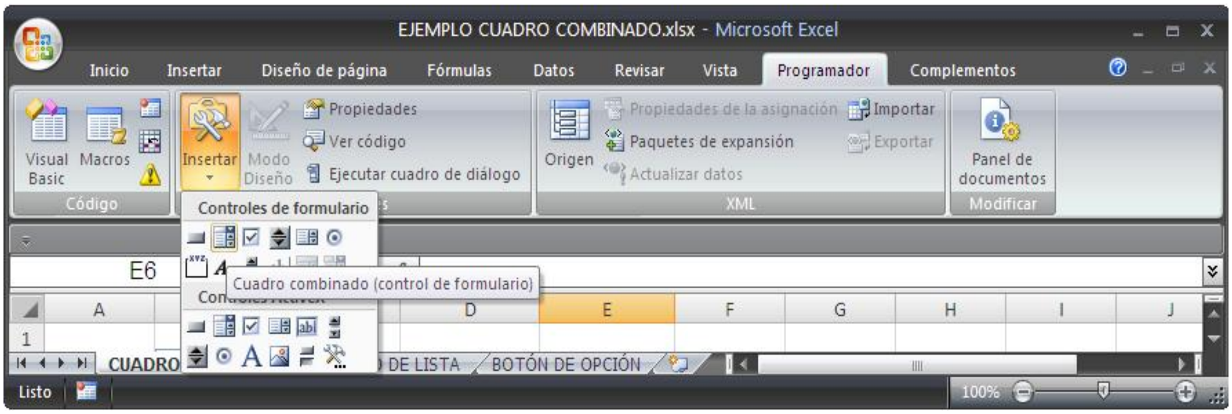
ATAN(número)

8.6. CONTROLES DE FORMULARIO

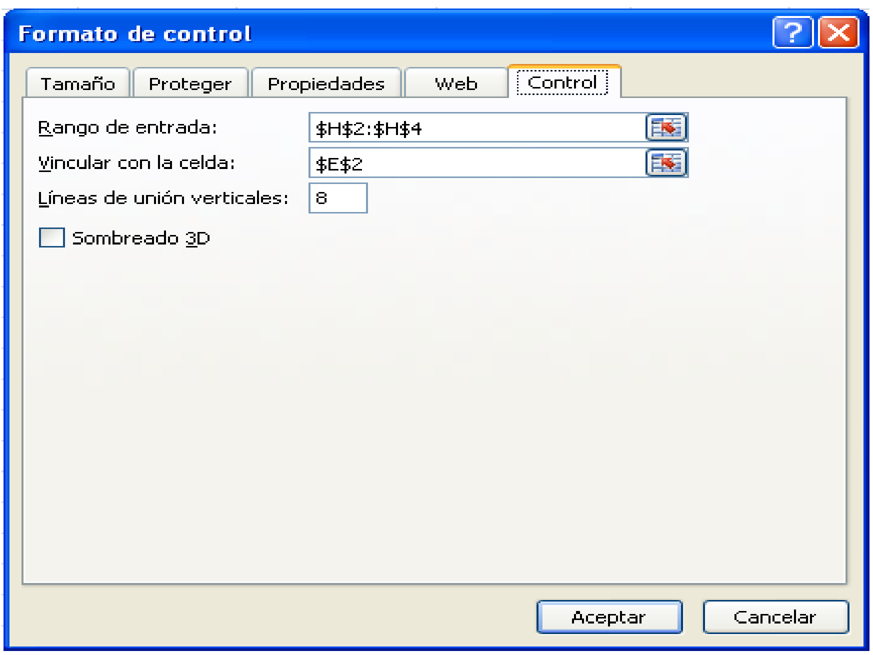
8.6.1. Cuadro combinado

Despliega un menú de opciones para que el usuario seleccione una.

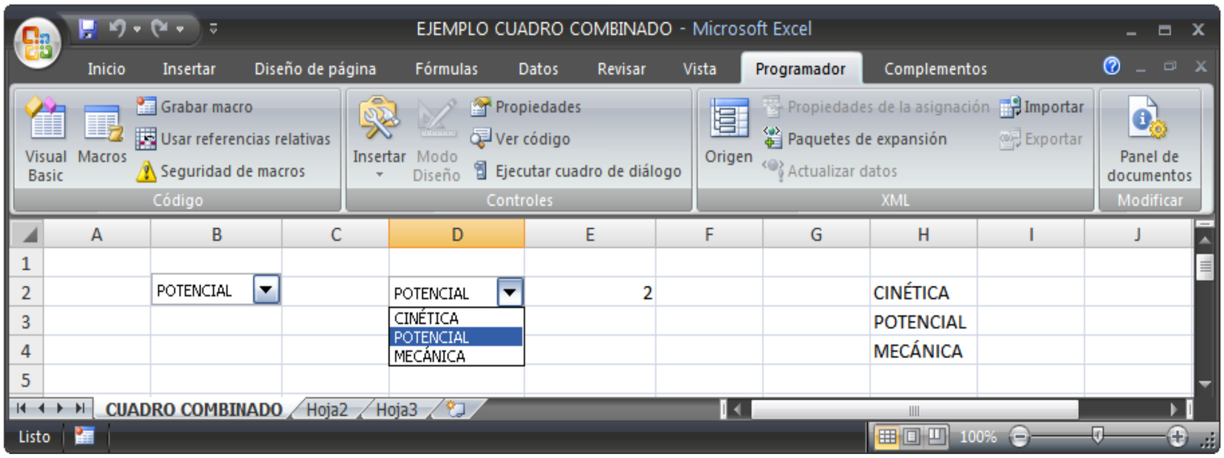
Para insertar un cuadro combinado se despliega la barra de herramientas **programador**, se muestra el menú **insertar**, clic sobre el ícono **cuadro combinado** y luego se inserta en la hoja.



El control debe ser vinculado a una celda dando clic derecho sobre el control y eligiendo **formato de control**. La celda toma los valores 1,2,3,.. dependiendo del elemento del menú que se elija.



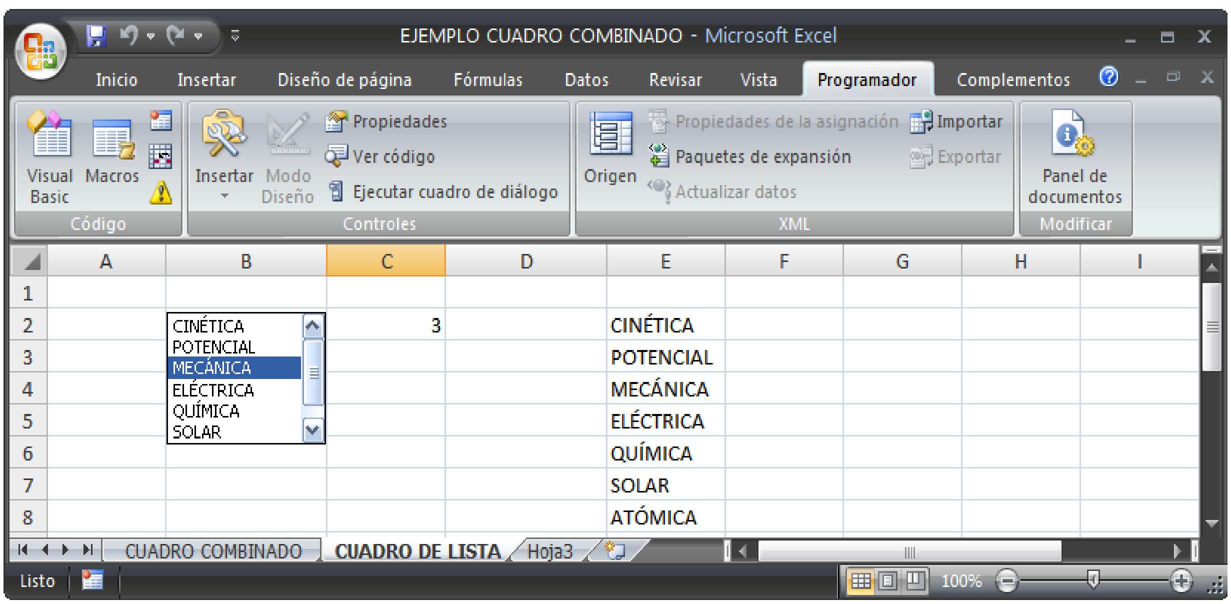
Los elementos del menú constituyen el rango de entrada.



8.6.2. Cuadro de lista

Muestra una lista grande de opciones para que el usuario elija una. Tiene una barra de desplazamiento vertical.

Éste control de formulario se encuentra en la barra de herramientas **programador**. Es necesario vincularlo a una celda y tiene un rango de entrada.

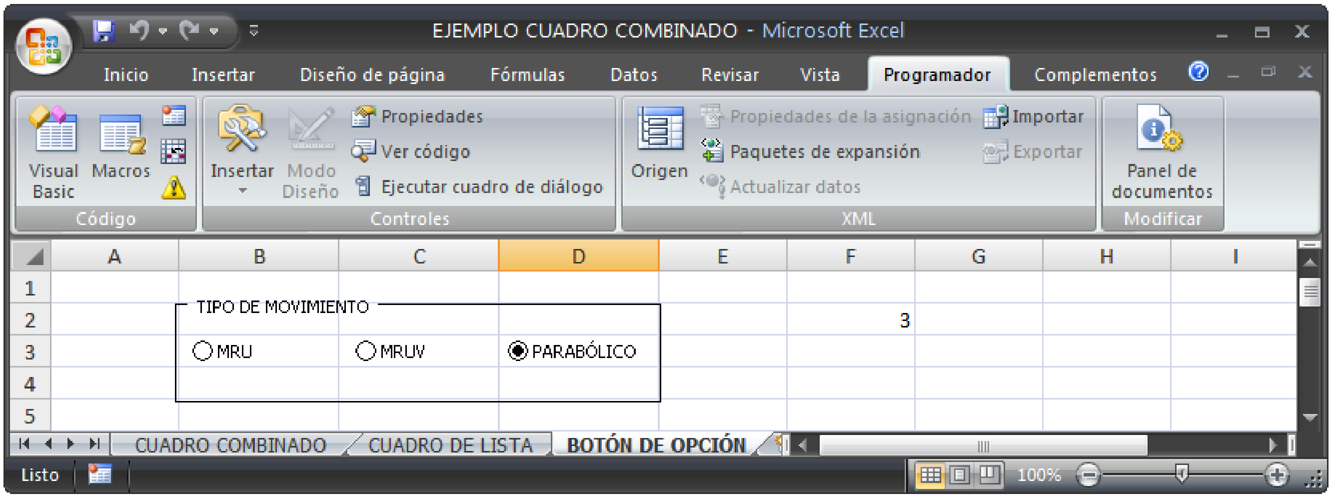


8.6.3. Botón de opción

Se usa para elegir una y sólo una de las opciones de un menú. Un grupo de botones se pueden organizar en un **cuadro de grupo**, sólo uno de ellos estará activo.

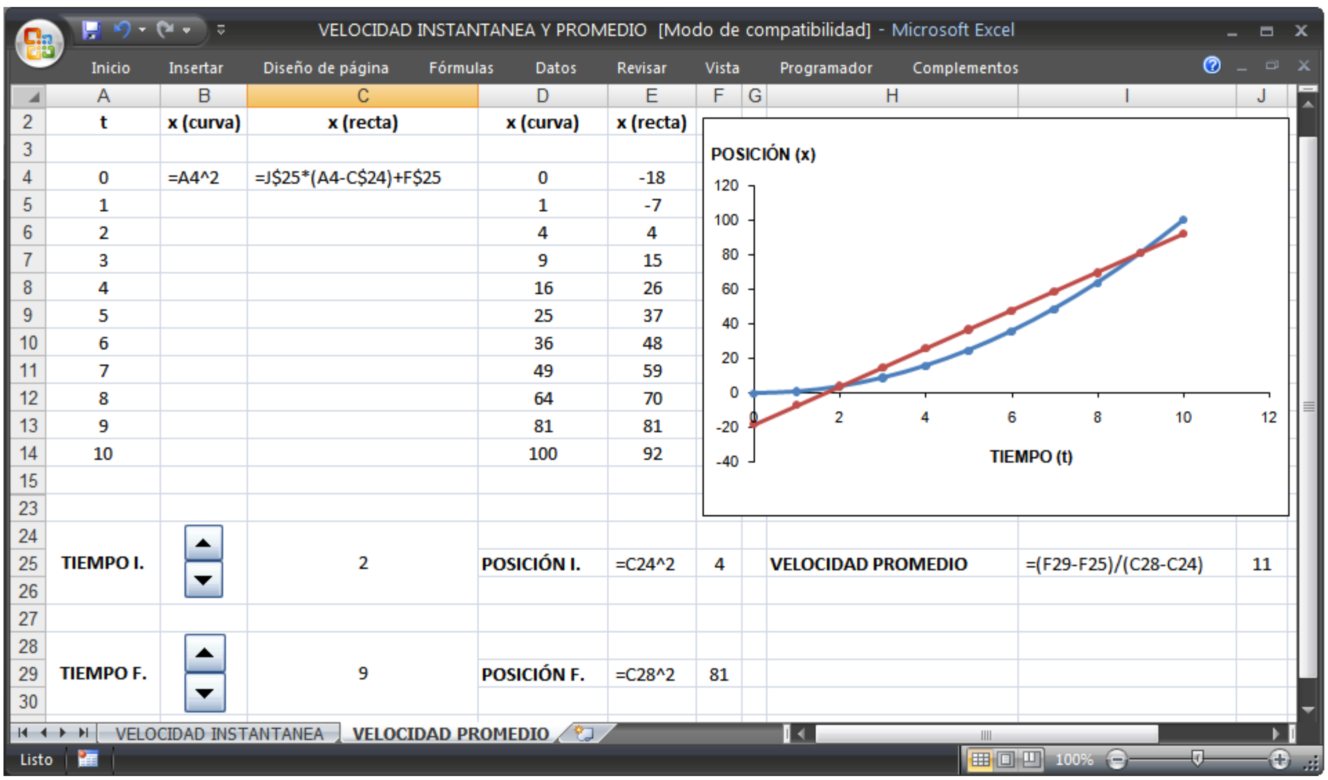
Éste control de formulario también pertenece a la barra de herramientas **programador**, no tiene rango de entrada.

Es necesario vincular a una celda únicamente cualquiera de los botones de opción disponibles.



<u>EJEMPLO</u> (Velocidad Media)

La velocidad promedio es la pendiente de la recta secante a la curva.



Los **controles número** están vinculados a las celdas C24 y C28. Éstas celdas varían su contenido de 0 a 5 y de 6 a 9. Clic sobre cualquiera de los **controles número** cambia en la gráfica la pendiente de la recta secante.

Para calcular la velocidad media se utiliza la ecuación de la pendiente de la recta.

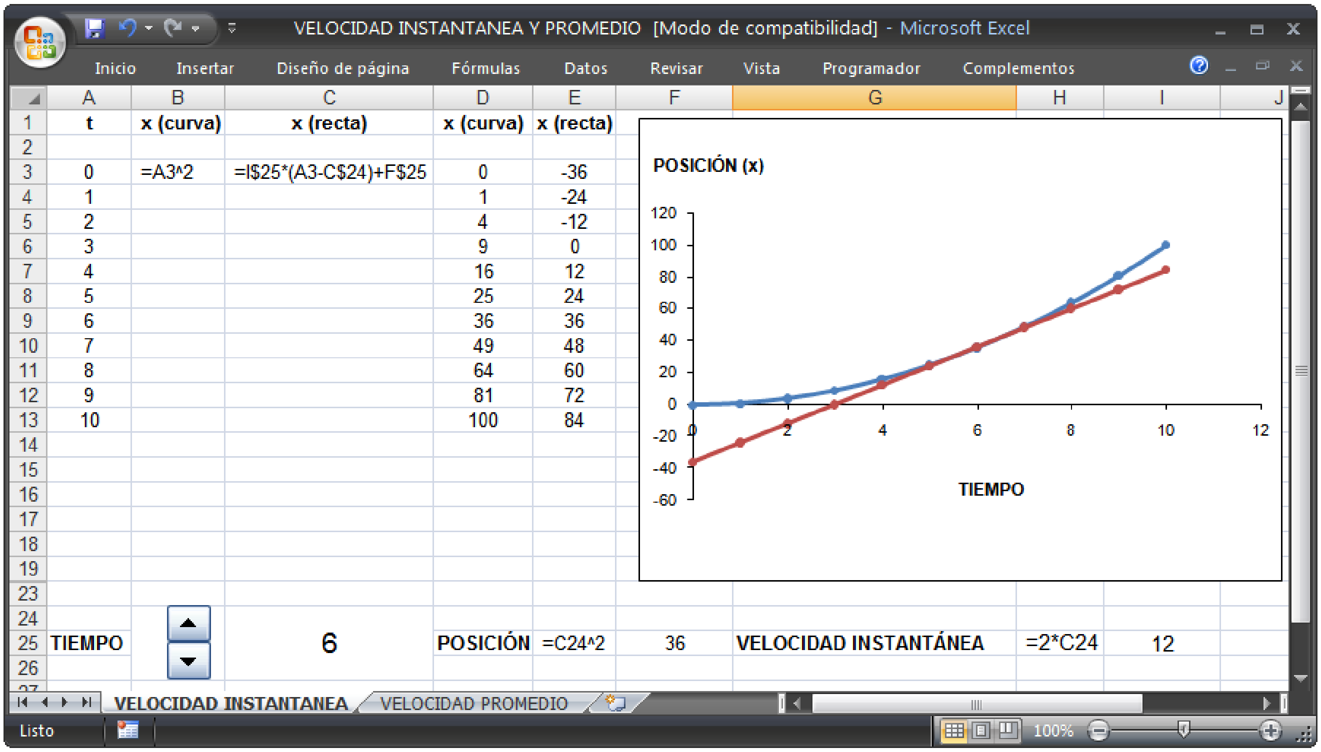
$$m = pendiente = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0}$$

La ecuación de la recta secante se puede encontrar usando la forma punto-pendiente.

$$x - x_0 = \bar{v}(t - t_0) \qquad \rightarrow \qquad x = \bar{v}(t - t_0) + x_0$$

EJEMPLO (Velocidad Instantánea)

La velocidad instantánea en el instante t es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto en el que la abcisa es t.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	t	x (curva)	x (recta)	x (curva)	x (recta)				
3	0	=A3^2	=I$25*(A3-C$24)+F$25	0	-36				
4	1			1	-24				
5	2			4	-12				
6	3			9	0				
7	4			16	12				
8	5			25	24				
9	6			36	36				
10	7			49	48				
11	8			64	60				
12	9			81	72				
13	10			100	84				
25	TIEMPO		6	POSICIÓN	=C24^2	36	VELOCIDAD INSTANTÁNEA	=2*C24	12

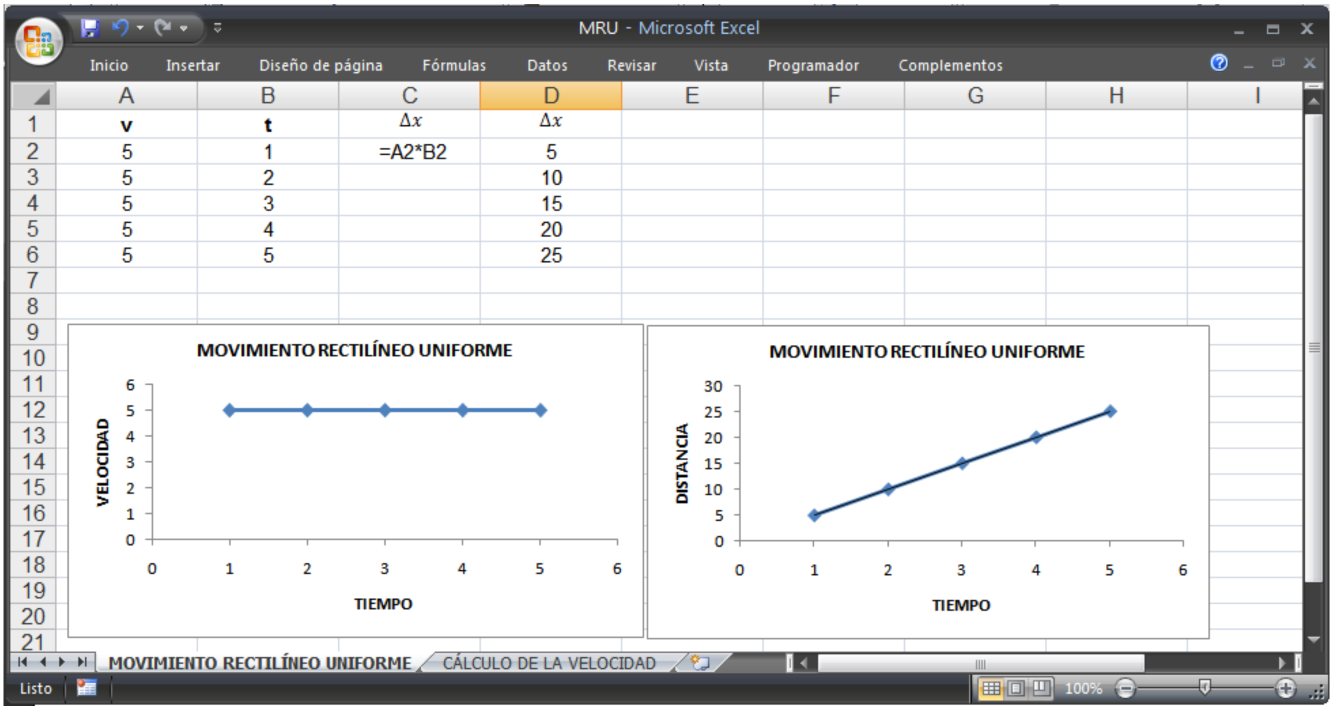
La velocidad instantánea (pendiente de la recta tangente a la curva) es la primera derivada del desplazamiento respecto del tiempo.

$$x(t) = t^2 \qquad \rightarrow \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t$$

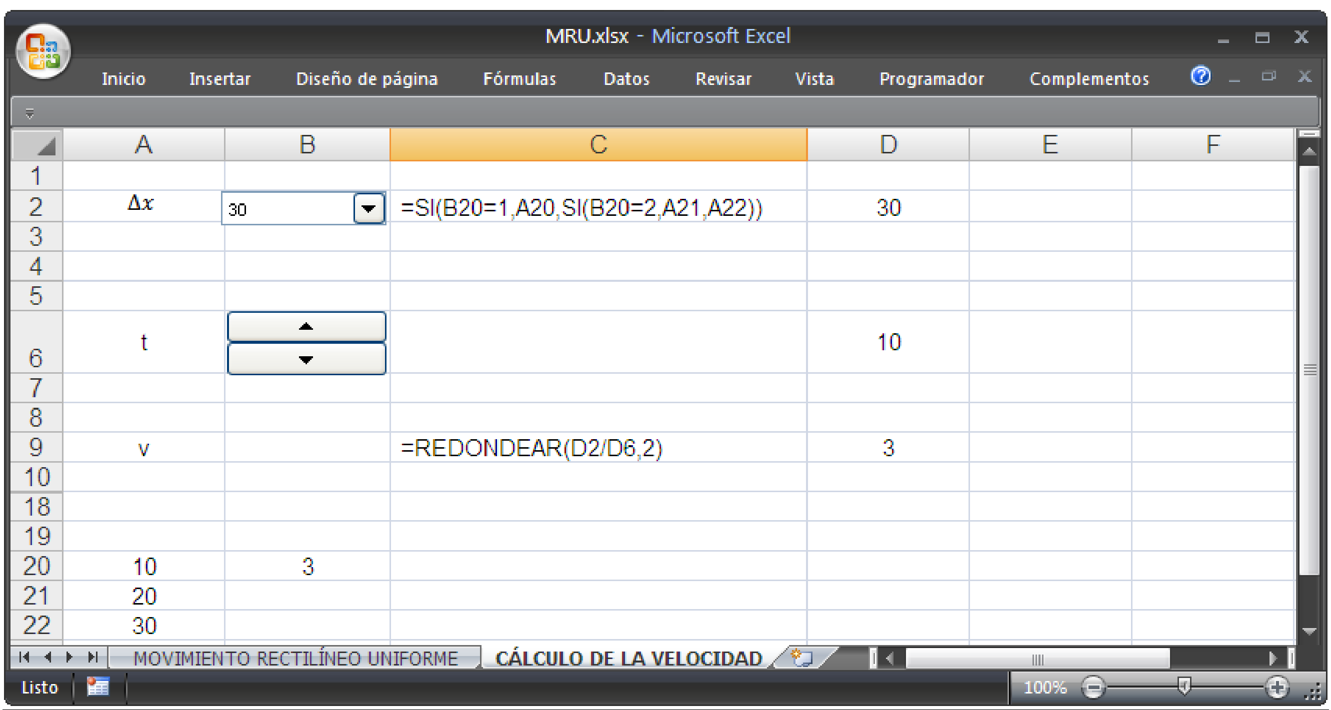
EJEMPLO (Movimiento Rectilíneo Uniforme)

Las gráficas siguientes muestran que en el MRU la velocidad es constante, puesto que no cambia cuando el tiempo cambia.

La pendiente de la recta **distancia – tiempo** indica que en éste movimiento un cuerpo recorre distancias iguales en intervalos de tiempo iguales. La pendiente es constante e igual a la magnitud de la velocidad.



EJEMPLO (Cálculo de la magnitud de la velocidad)



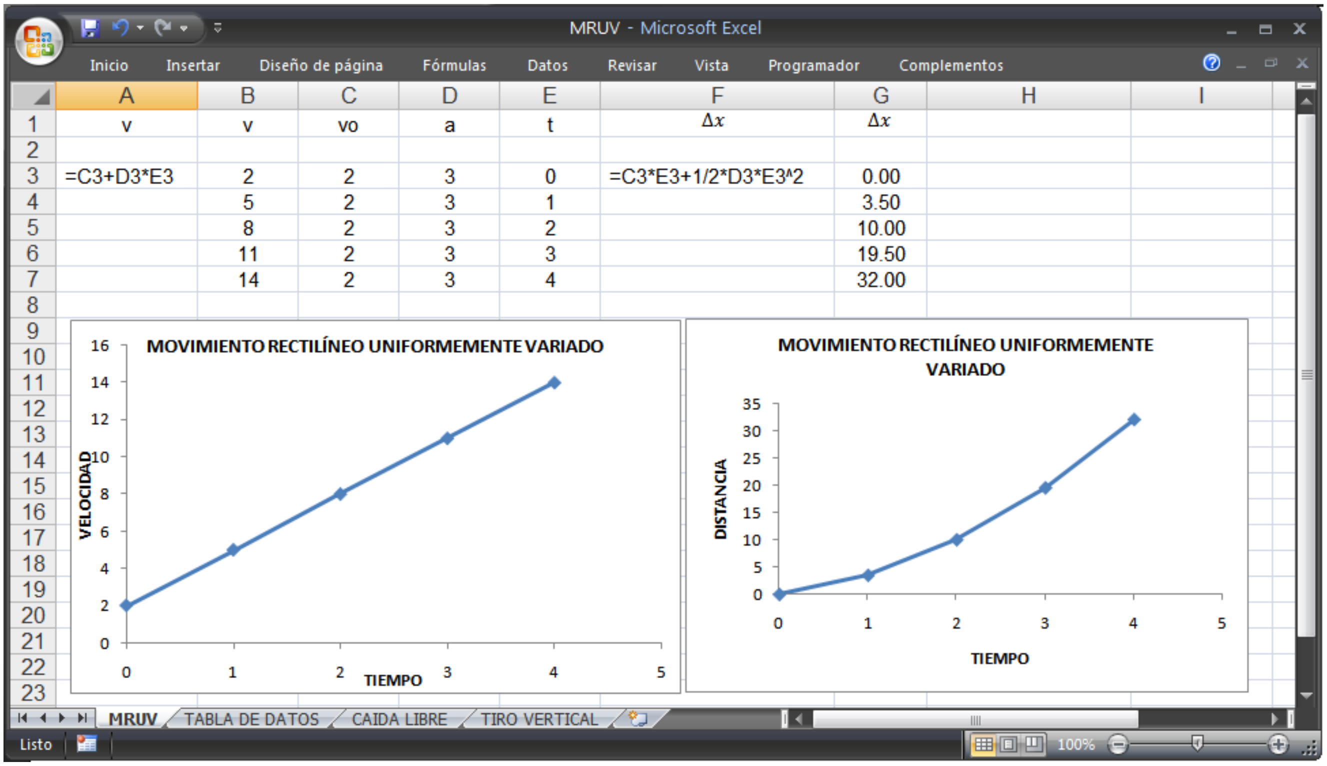
En el ejemplo un cuerpo recorre una distancia de 3 metros por segundo. Esa cantidad es constante a través del tiempo.

El cuadro combinado y el control de número permiten variar la distancia y el tiempo respectivamente. El primero está vinculado a la celda B20 y su rango de entrada es A20:A22.

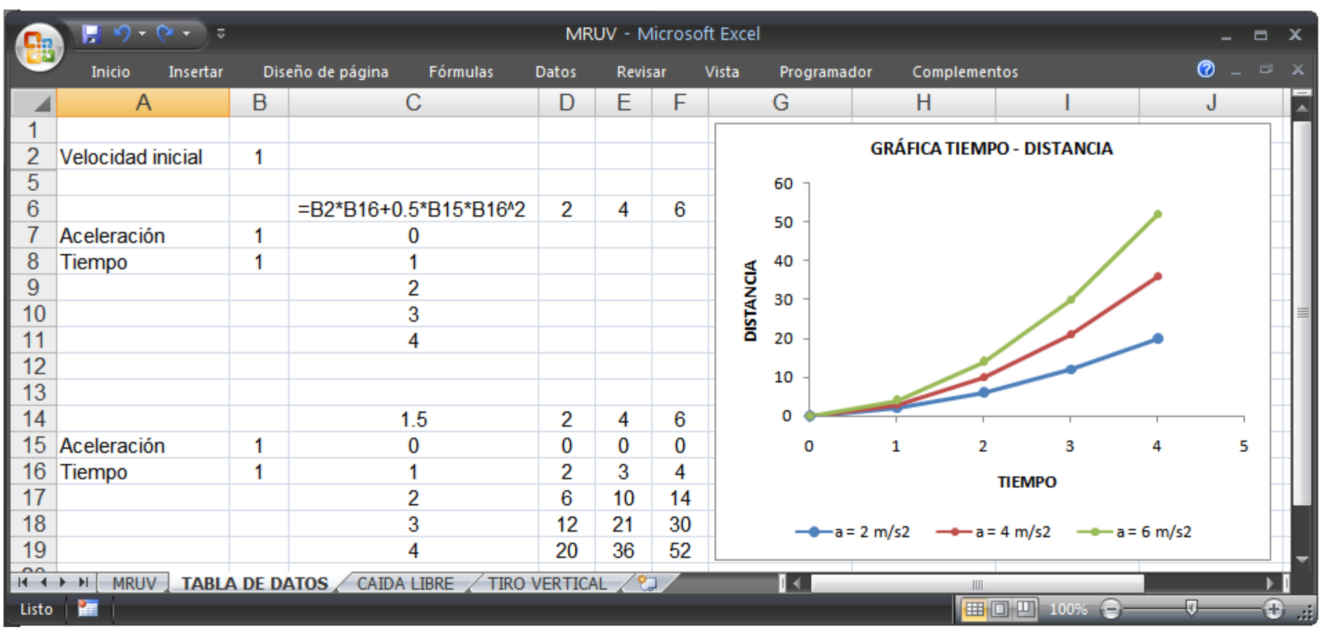
EJEMPLO (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado)

La gráfica **velocidad – tiempo** muestra que el cambio de velocidad por unidad de tiempo es constante, es decir que la aceleración es constante en el MRUV.

La gráfica **distancia – tiempo** indica que la distancia recorrida por unidad de tiempo aumenta, la velocidad cambia uniformemente. La pendiente de la recta tagente a la curva es creciente.



EJEMPLO (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado)



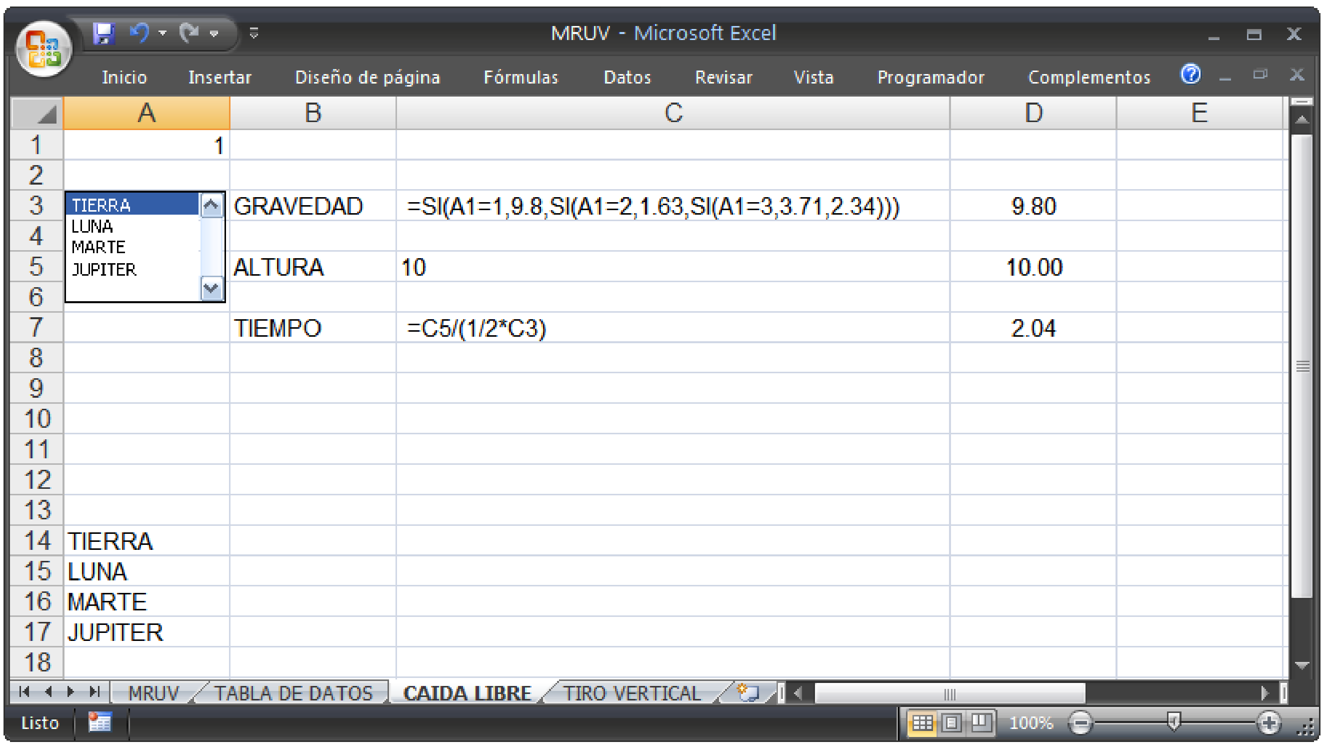
La gráfica muestra que la distancia recorrida depende de la magnitud de la aceleración. Para una mayor aceleración la distancia recorrida será también mayor.

En el ejemplo hay una tabla de datos en el rango C6:F11, la celda de entrada (fila) es B7 y la celda de entrada (columna) es B8. La fórmula usada en los cálculos aparece en la celda C6.

EJEMPLO (Caída Libre)

Un martillo se deja caer desde una altura de 10 m. ¿ Cuánto tiempo dura la caida para diferentes valores de g ?

El tiempo es mayor cuando g es menor. Por ejemplo el tiempo de caída en la Luna es 6 veces mayor que en la Tierra.

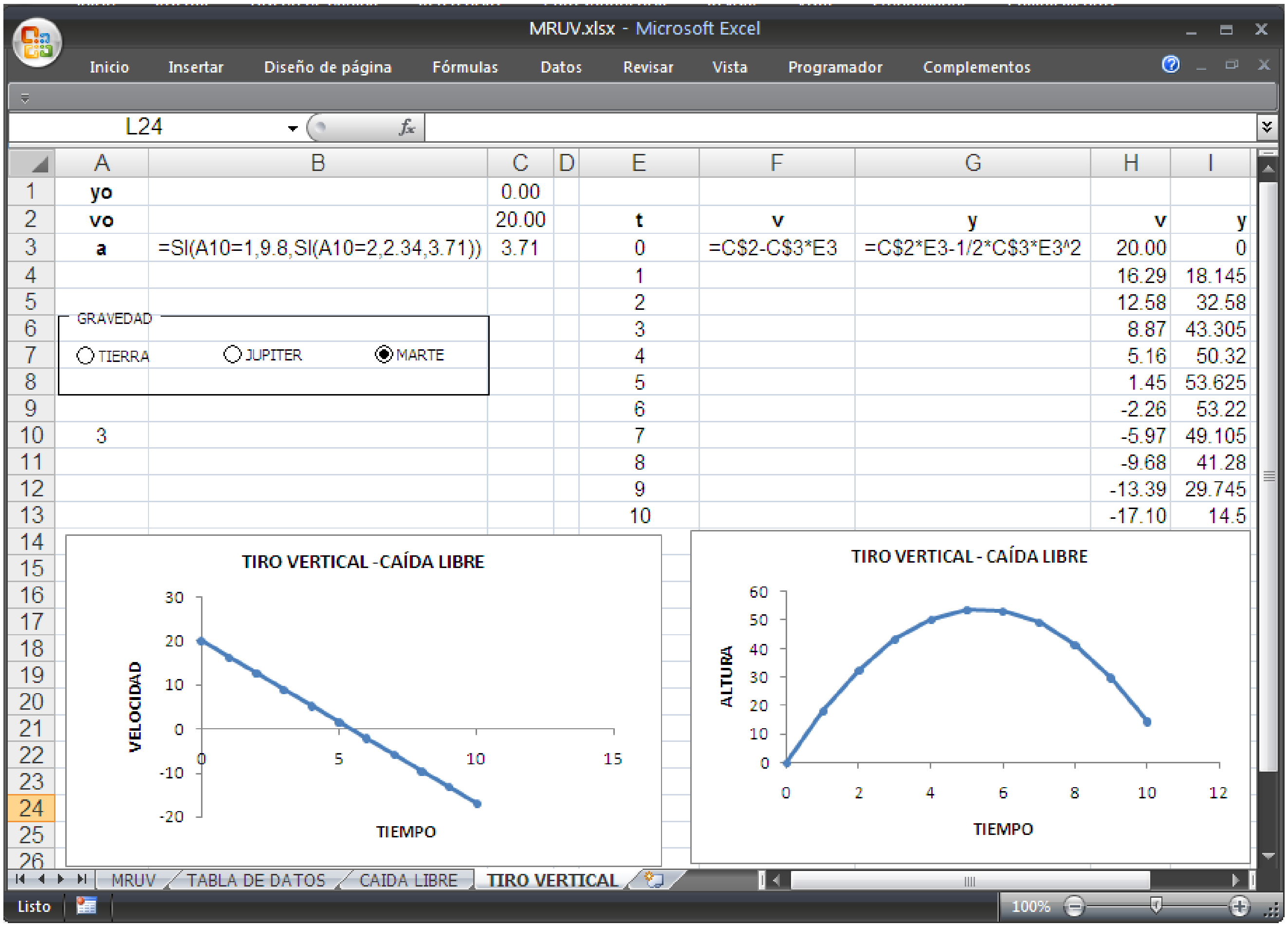


Un cuadro de lista es usado para seleccionar el lugar en el que ocurre la caída y determinar el correspondiente valor de g .

El cuadro de lista está vinculado a la celda A1 y el rango de entrada es A14:A17.

EJEMPLO (Caída Libre – Tiro Vertical)

Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y su movimiento es afectado únicamente por la fuerza de gravedad. La magnitud de la velocidad disminuye uniformemente hasta cero, instante en el que la altura es máxima. La velocidad cambia de signo y el desplazamiento ahora está dirigido hacia abajo.



La gráfica (recta) **velocidad – tiempo** muestra que la aceleración en caída libre es constante. Mientras que la gráfica **altura – tiempo** indica que el desplazamiento por unidad de tiempo cambia uniformemente, es decir el cambio de velocidad es constante.

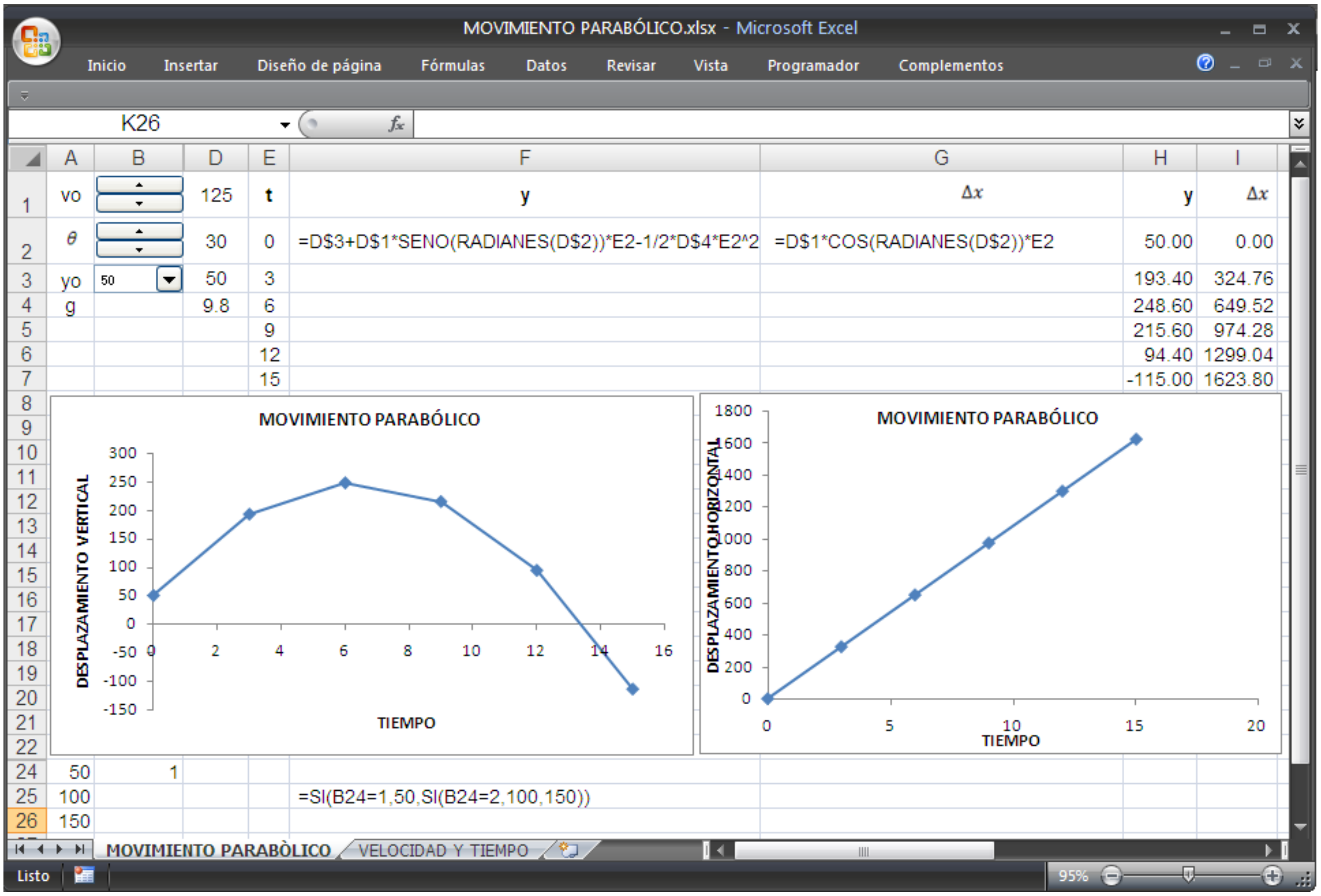
En la hoja de cálculo se han insertado tres botones de opción sobre un cuadro de grupo, ello permite elegir el lugar en el que ocurre la caída libre y el correspondiente valor g . Cualquiera de los botones está vinculado a la celda A10, no es necesario vincular los otros. Clic sobre otro botón de opción cambia las gráficas.

<u>EJEMPLO</u> (Movimiento Parabólico)

Un cuerpo es lanzado al espacio con velocidad inicial v_0 y formando ángulo θ con la horizontal. Su trayectoria es una parábola, el desplazamiento vertical por unidad de tiempo cambia uniformemente y el desplazamiento horizontal por unidad de tiempo es constante.

La magnitud del desplazamiento vertical por unidad de tiempo disminuye cuando el cuerpo se mueve hacia arriba y aumenta cuando se mueve hacia abajo.

Para mejorar el análisis del movimiento parabólico se han insertado dos control de número vinculados a las celdas D1 y D2. Estos permiten variar la magnitud y dirección de la velocidad inicial. El cuadro combinado se utiliza para elegir la altura inicial, está vinculado a la celda B24 y el rango de entrada es A24:A26.



La celda D3 contiene la fórmula escrita en la celda F25.

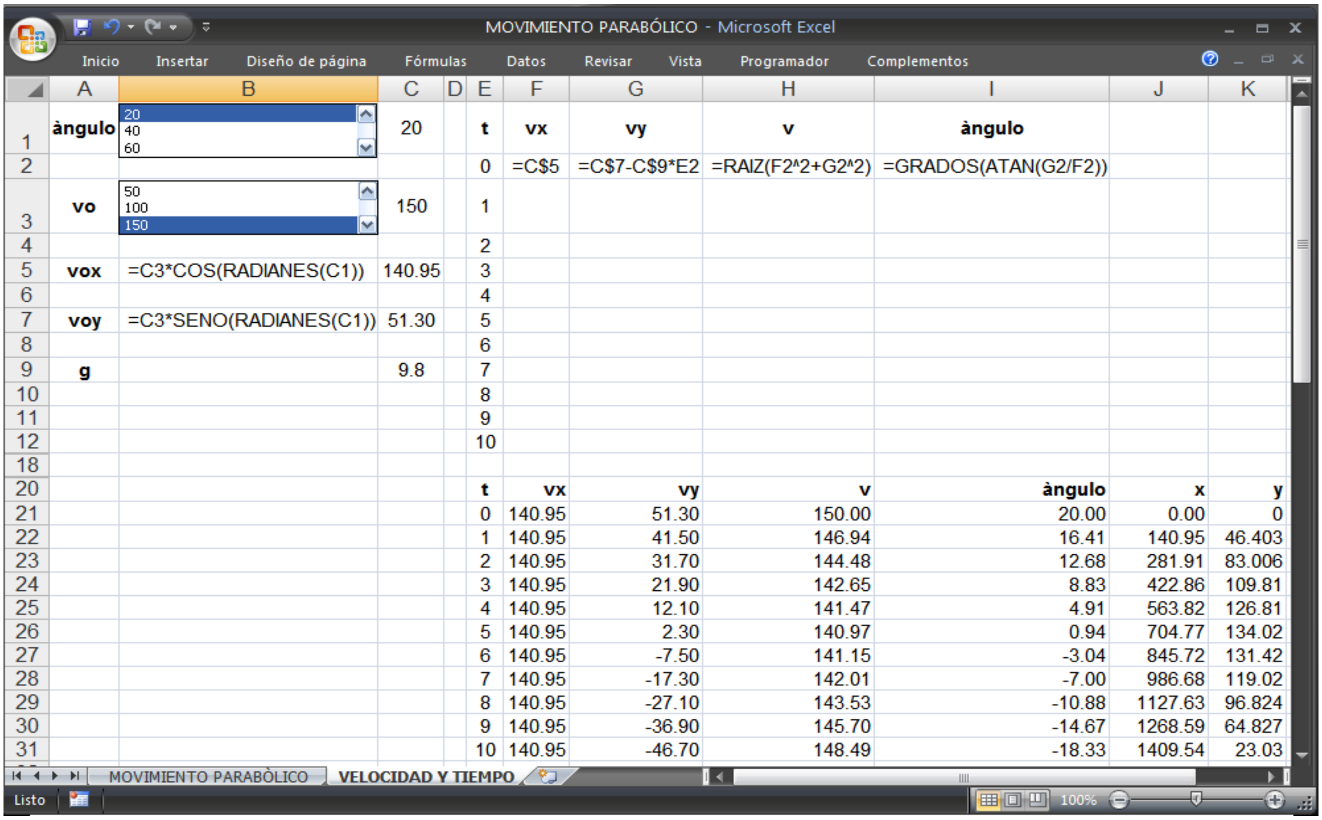
<u>EJEMPLO</u> (Movimiento Parabólico)

La componente horizontal de la velocidad es constante y la componente vertical cambia uniformemente.

El valor absoluto de la componente vertical disminuye cuando el proyectil sube, es cero en el punto más alto de la trayectoria y luego aumenta.

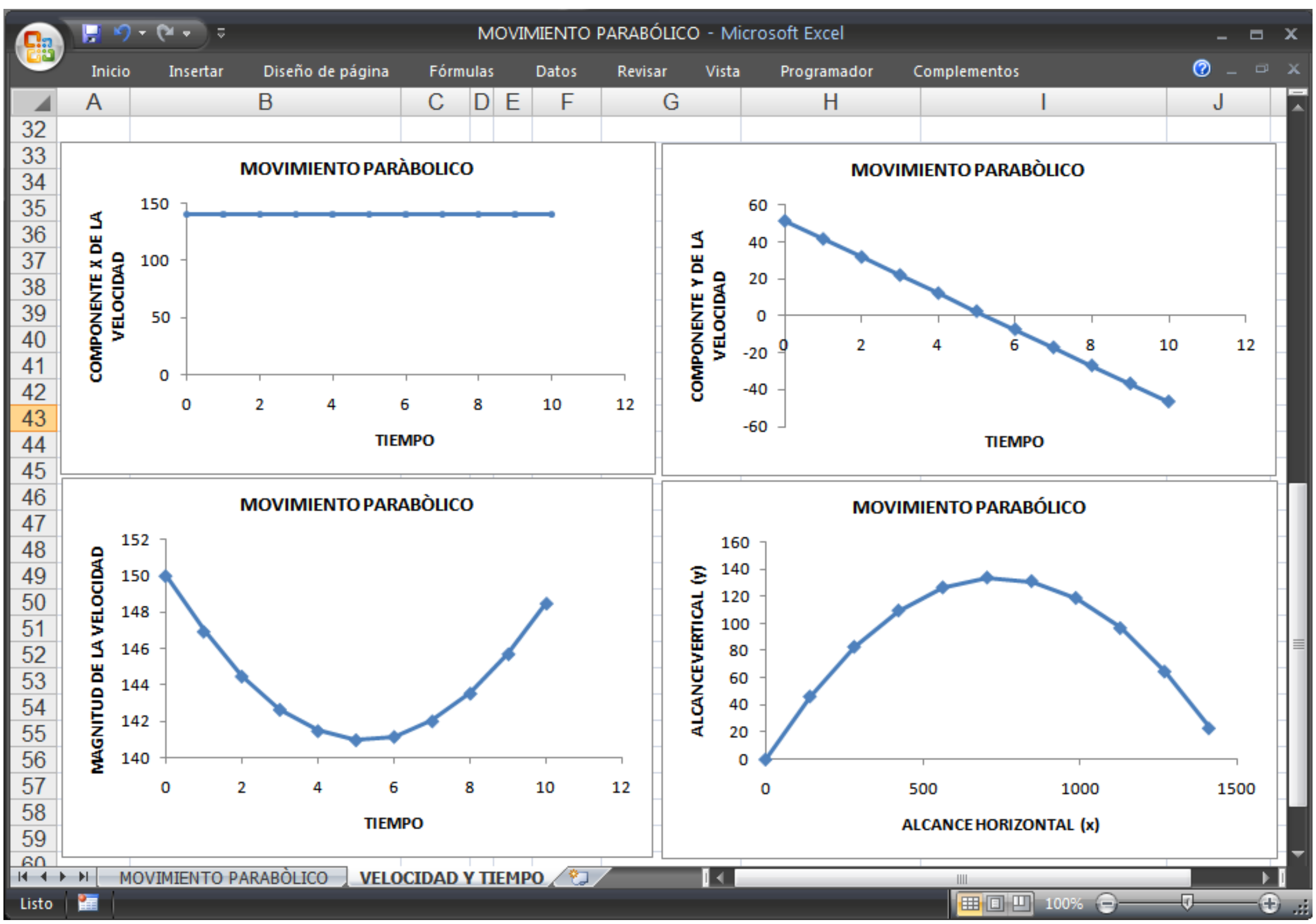
La velocidad del proyectil es la suma vectorial de las componentes. Como la componente x es constante entonces la magnitud de la velocidad tiene el comportamiento de la componente y.

Se insertaron dos cuadros de lista para permitir variar el ángulo de lanzamiento y la velocidad inicial. Están vinculados a las celdas C1 y C3. Los rangos de entrada están ocultos.



	A	B	C	E	F	G	H	I
1	àngulo	20 40 60	20	t	vx	vy	v	àngulo
2				0	=C$5	=C$7-C$9*E2	=RAIZ(F2^2+G2^2)	=GRADOS(ATAN(G2/F2))
3	vo	50 100 150	150	1				
4				2				
5	vox	=C3*COS(RADIANES(C1))	140.95	3				
6				4				
7	voy	=C3*SENO(RADIANES(C1))	51.30	5				
8				6				
9	g		9.8	7				
10				8				
11				9				
12				10				

	t	vx	vy	v	àngulo	x	y
20	t	vx	vy	v	àngulo	x	y
21	0	140.95	51.30	150.00	20.00	0.00	0
22	1	140.95	41.50	146.94	16.41	140.95	46.403
23	2	140.95	31.70	144.48	12.68	281.91	83.006
24	3	140.95	21.90	142.65	8.83	422.86	109.81
25	4	140.95	12.10	141.47	4.91	563.82	126.81
26	5	140.95	2.30	140.97	0.94	704.77	134.02
27	6	140.95	-7.50	141.15	-3.04	845.72	131.42
28	7	140.95	-17.30	142.01	-7.00	986.68	119.02
29	8	140.95	-27.10	143.53	-10.88	1127.63	96.824
30	9	140.95	-36.90	145.70	-14.67	1268.59	64.827
31	10	140.95	-46.70	148.49	-18.33	1409.54	23.03

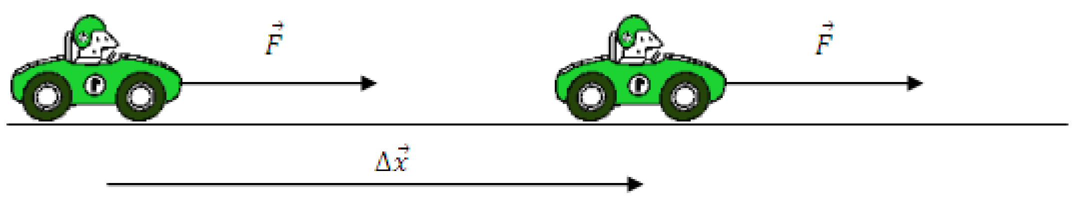


CAPÍTULO IX

9. TRABAJO Y ENERGÍA

9.1. TRABAJO

Una fuerza hace trabajo sobre un cuerpo cuando lo desplaza. El trabajo realizado por una fuerza constante es igual al producto de la componente de la fuerza en dirección del desplazamiento por el desplazamiento.



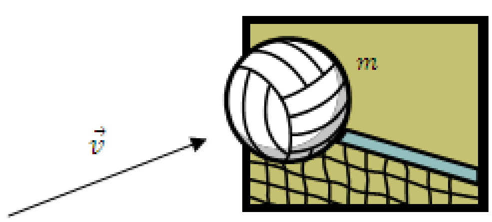
$$Trabajo = W = F\Delta x\cos\theta \qquad \theta = \text{ángulo formado por } \vec{F} \text{ y } \Delta\vec{x}$$

9.2. ENERGÍA

Un cuerpo tiene energía cuando puede realizar trabajo. La energía es la capacidad que un cuerpo tiene de hacer trabajo.

9.2.1. Energía Cinética

Es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su movimiento. La energía cinética de un cuerpo es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.



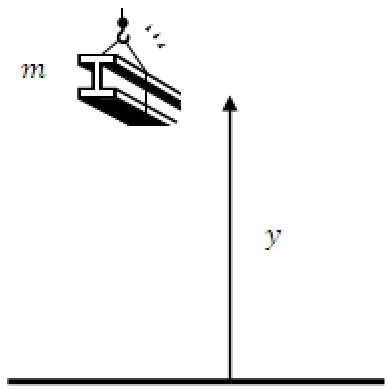
$$Energía\ Cinética = K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$m = masa \quad y \quad v = velocidad$$

La energía cinética de un cuerpo en movimiento es igual al trabajo necesario para ponerlo en estado de reposo.

9.2.2. Energía Potencial Gravitatoria

Ésta energía está relacionada con la posición de la masa respecto de algún nivel de referencia.



$$Energía\ Potencial\ Gravitatoria = U_g = mgy$$

$Nivel\ de\ referencia$

La energía potencial gravitatoria es igual al trabajo realizado por una fuerza al desplazar la masa desde una determinada posición y hasta el nivel de referencia.

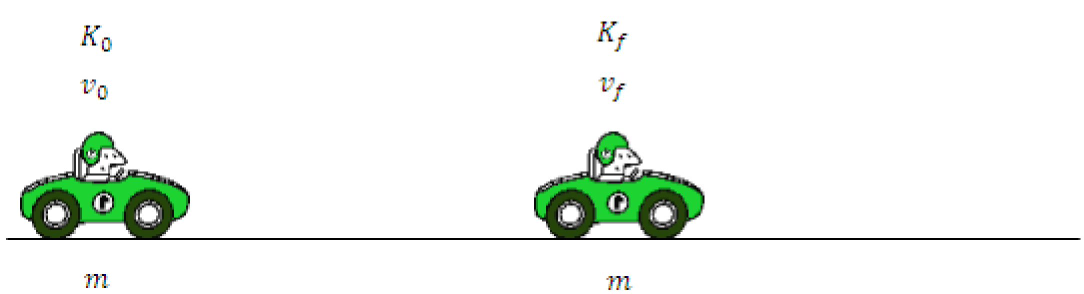
9.2.3. Energía Mecánica

La suma de las energías cinética y potencial gravitatoria de un cuerpo recibe el nombre de Energía Mecánica.

$$Energìa\ Mecànica = K + U_g$$

9.3. TEOREMA TRABAJO – ENERGÍA CINÉTICA

El trabajo realizado sobre un cuerpo es igual al cambio en su energía cinética.

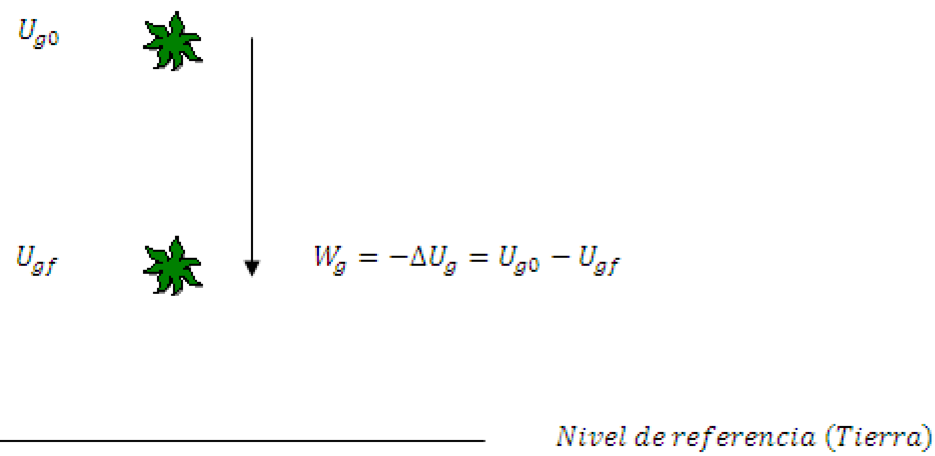


$$W = \Delta K = K_f - K_o = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$E_0 = E_f$

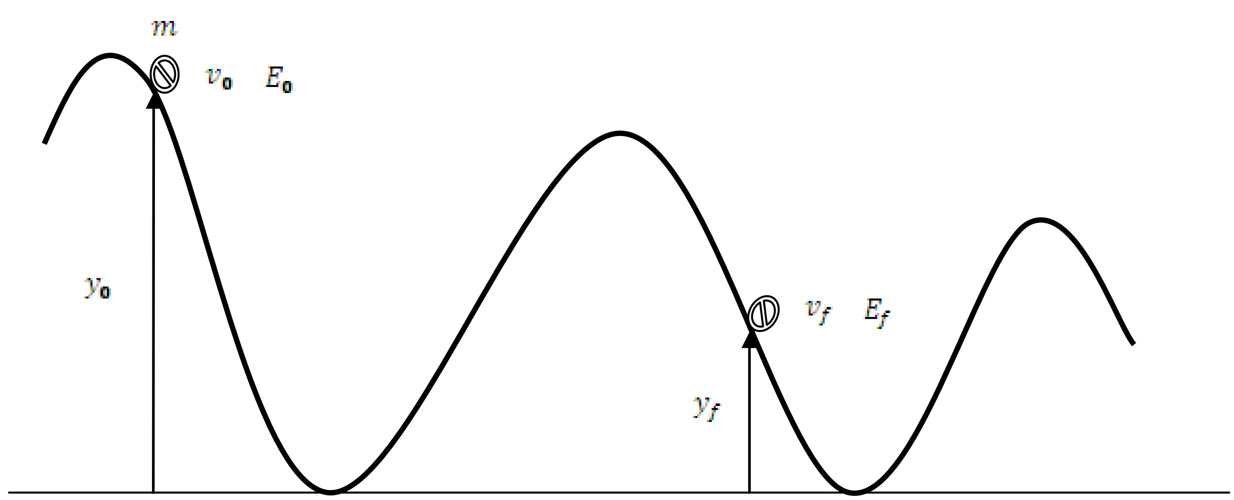
9.4. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD

El trabajo efectuado por la fuerza de gravedad al desplazar un cuerpo desde un punto a otro de un campo gravitacional es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitatoria.



9.5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Cuando sobre un sistema de masas actúan sólo fuerzas conservativas, como por ejemplo la fuerza de gravedad o la fuerza ejercida por un resorte sobre una masa, la energía mecánica es constante a través del tiempo.



$$E_0 = E_f$$

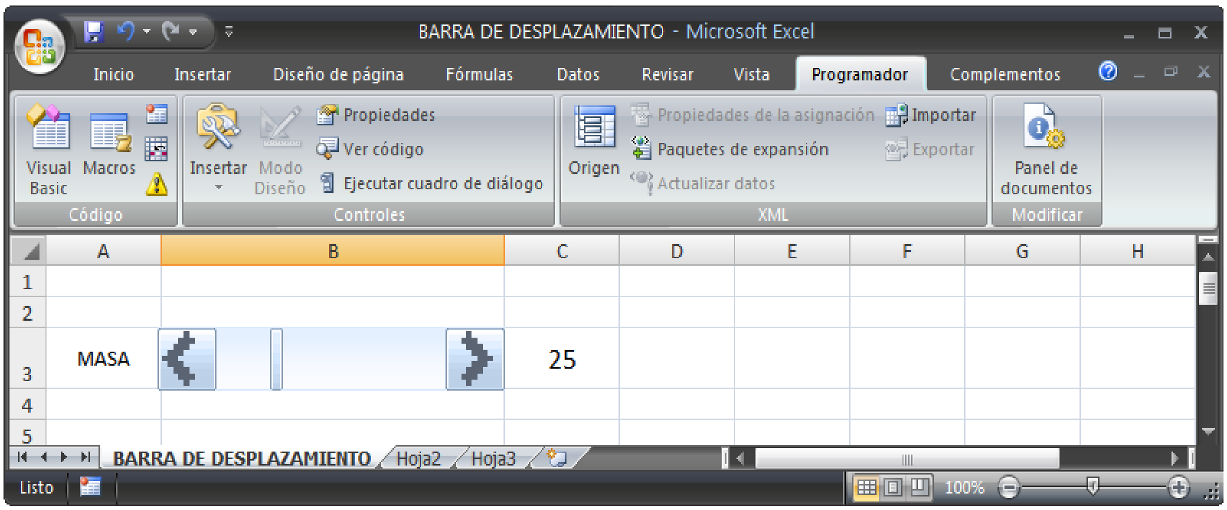
9.6. CONTROLES DE FORMULARIO

9.6.1. Barra de desplazamiento

Permite variar el contenido de una celda, aumentarlo o disminuirlo una cantidad constante llamada incremento.

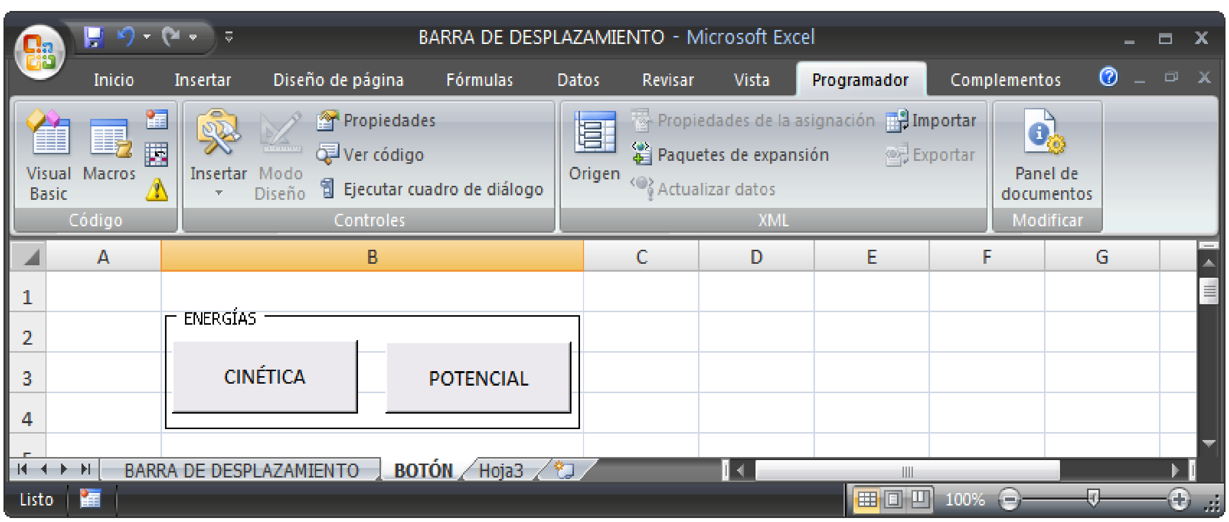
Para insertar una barra de desplazamiento se muestra el menú **Programador**, luego el menú **Insertar** y clic sobre el ícono **barra de desplazamiento**.

Éste control de formulario se vincula a una celda. Tiene valores mínimo, máximo e incremento para la celda.



9.6.2. Botón

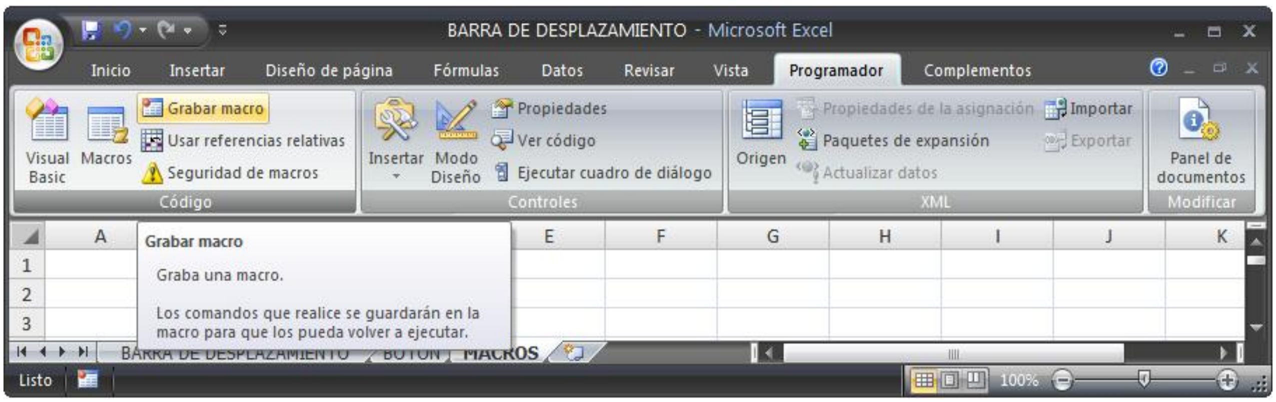
Ejecuta un conjunto de acciones grabadas llamado macro. Para asociar el bóton a una macro se da clic derecho sobre el botón y se elige **asignar macro**.



9.7. MACRO

Una macro es una secuencia de acciones grabadas para automatizar el trabajo. Para grabar una macro se procede asi:

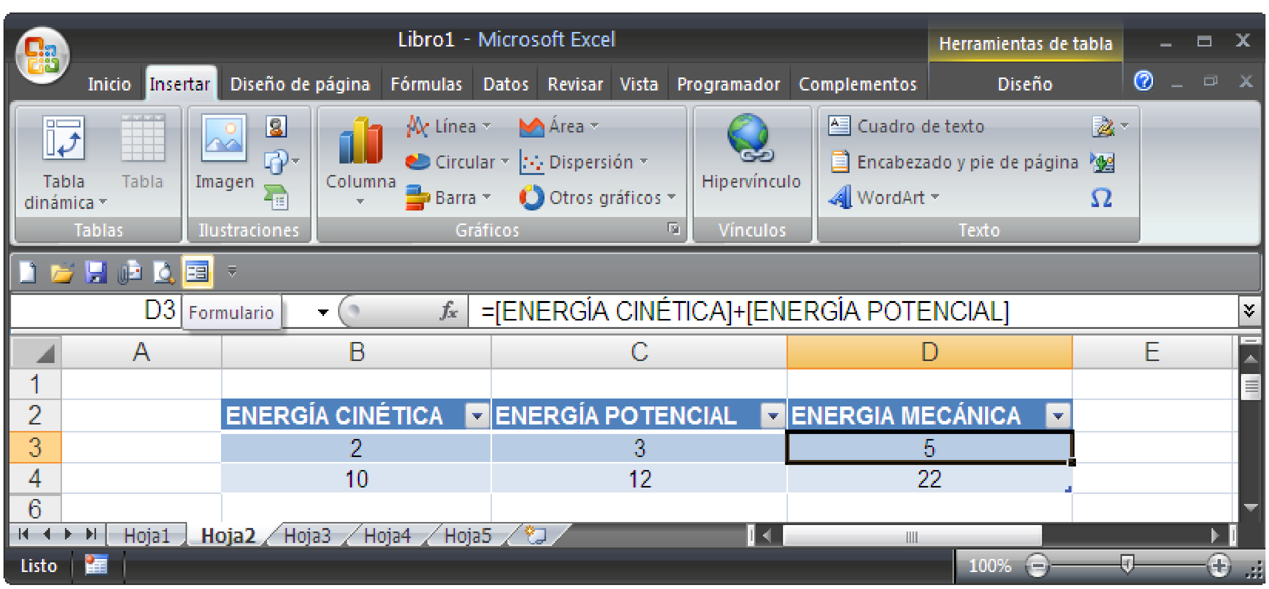
1. Mostrar el menú **Programador**
2. Clic en el ícono **Grabar macro**
3. Nombrar la macro
4. Ejecutar cada una de las acciones que se quiere grabar en la macro
5. Clic en el ícono **Detener grabación**



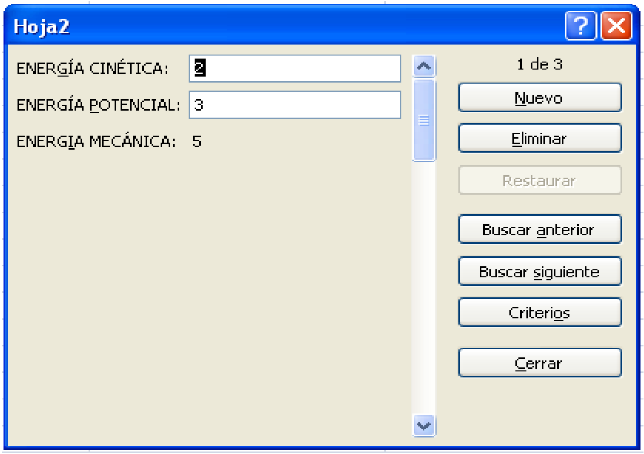
9.8. TABLA

Permite administrar y analizar datos relacionados. Una tabla está compuesta por grupos bien definidos llamados campos (encabezados), algunos se calculan a partir de otros.

Para crear una tabla se selecciona el área de la hoja que contiene los datos y encabezados, se muestra el menú **Insertar** y clic en el ícono **Tabla**.



Para el ingreso de datos se puede utilizar un formulario, clic en la tabla y luego en el ícono **formulario**.



Es posible efectuar filtros o consultas de datos. Clic en el botón abrir menú (ubicado a la derecha de cada encabezado) del campo en el que se basará la consulta y elegir **filtro de texto o número**, establecer los criterios de la consulta.

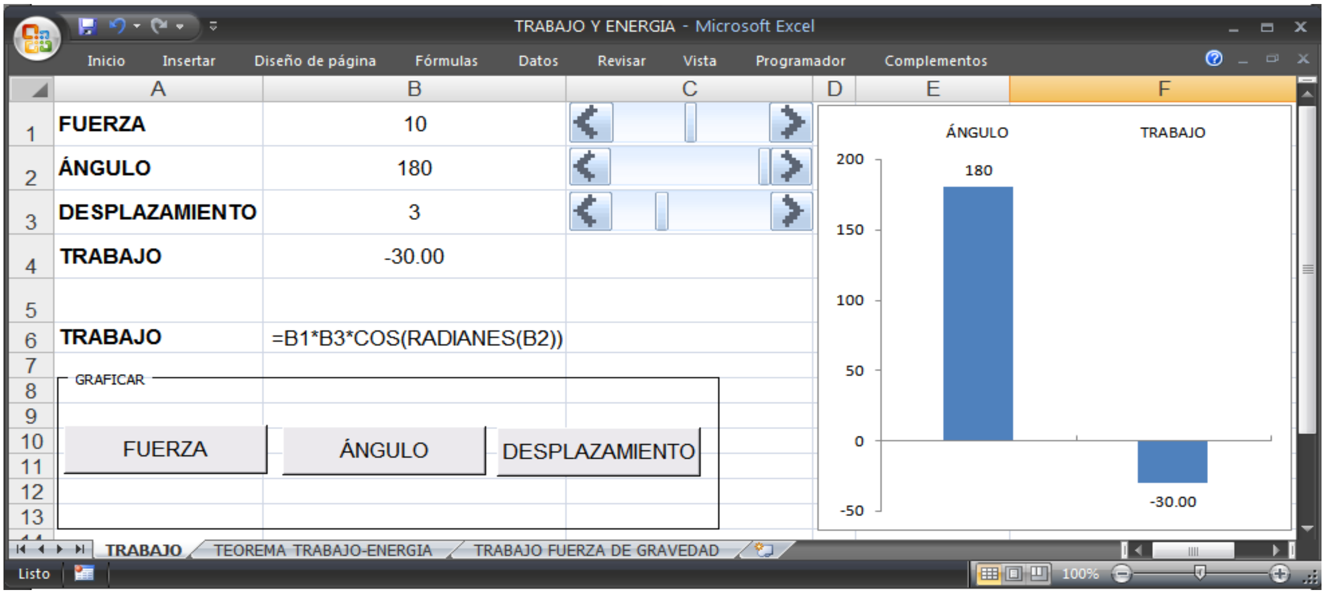
EJEMPLO (Trabajo)

El trabajo realizado por la fuerza es máximo cuando el ángulo que forma con la dirección del desplazamiento es 0^0 o 180^0, y cero para 90^0. Además es proporcional a la magnitud de la fuerza y del desplazamiento.

Las barras de desplazamiento permiten variar la fuerza, ángulo y desplazamiento. Están vinculadas a las celdas B1, B2 y B3.

A cada botón se le ha asignado una macro que cambia el rango de datos del gráfico. Clic derecho sobre la gráfica, seleccionar datos, rango de datos del gráfico (por ejemplo seleccionar A2:B2, A4:B4).

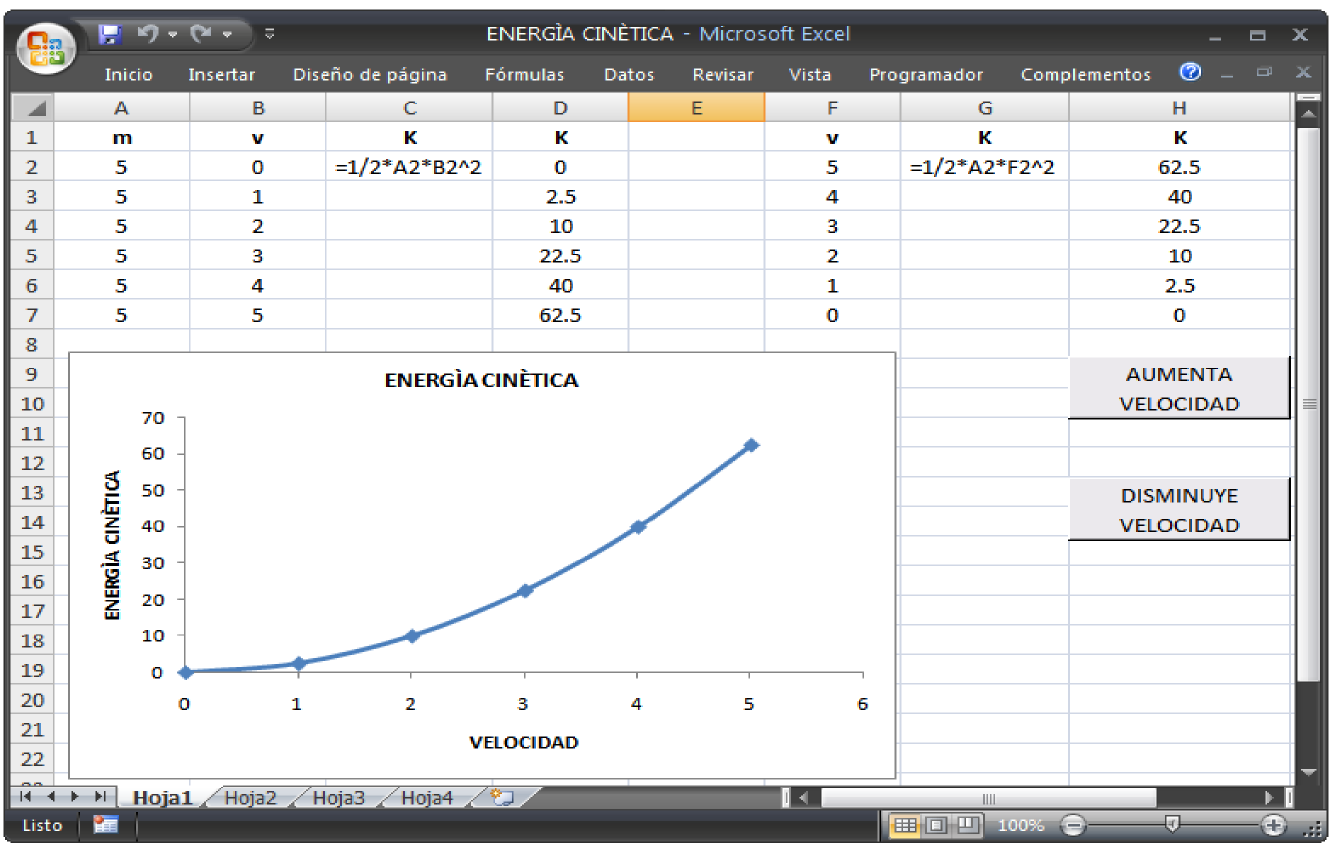
Cada barra de desplazamiento y botón modifica la gráfica para mejorar el estudio del trabajo desarrollado por la fuerza.



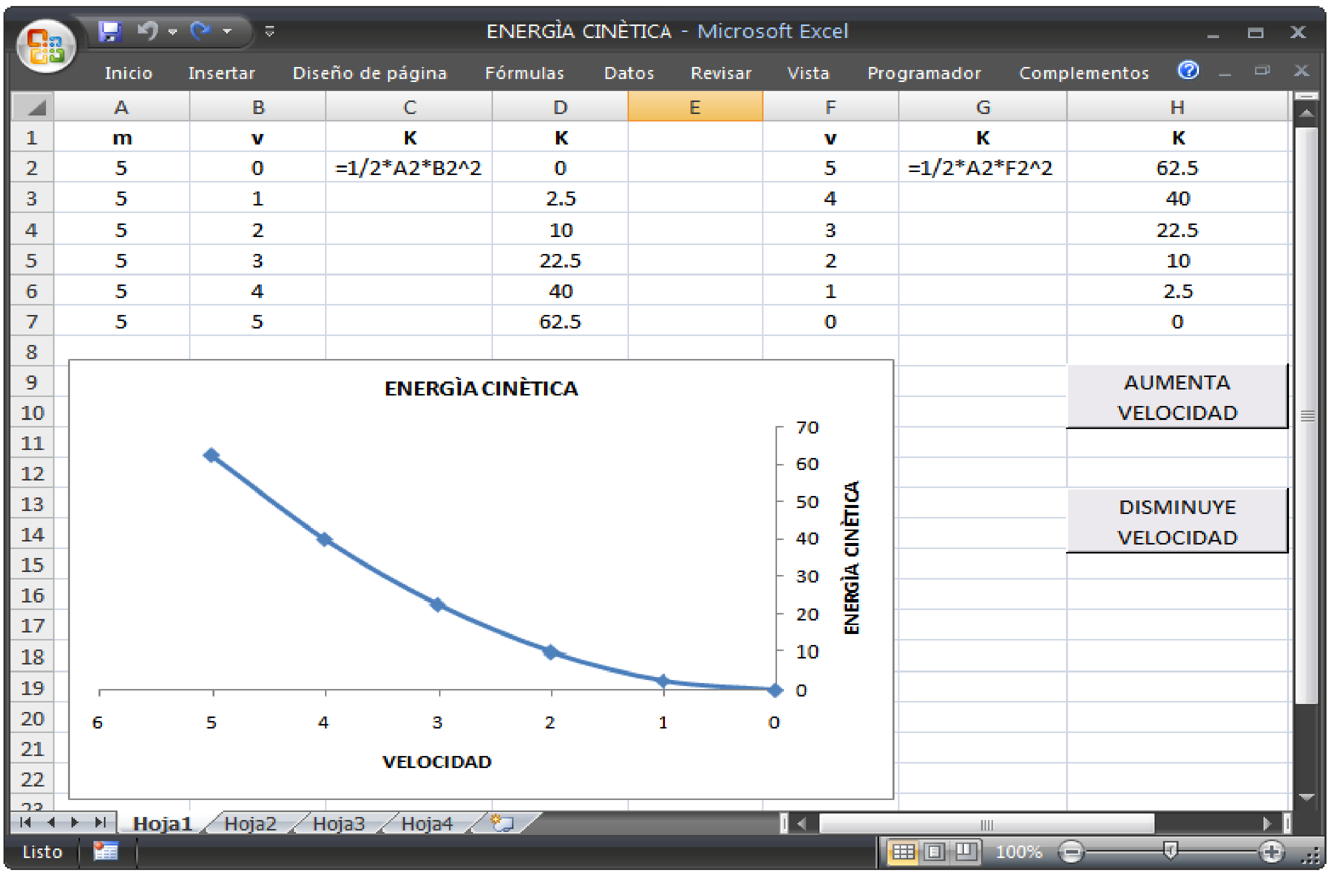
EJEMPLO (Energía Cinética)

La energía cinética de un cuerpo aumenta cuando aumenta la velocidad. Cuando la velocidad se duplica la energía cinética se cuadruplica. Si la velocidad se multiplica por tres la energía cinética queda multiplicada por nueve. Un cuerpo en reposo no tiene energía cinética.

A cada botón le corresponde una macro que modifica el rango de datos del gráfico. Clic derecho sobre el gráfico, seleccionar datos, rango de datos del gráfico (por ejemplo seleccionar B2:B7,D2:D7). Una gráfica es presentada a la vez dependiendo del botón que reciba un clic.



La energía cinética disminuye cuando disminuye la velocidad. Si la velocidad se reduce a la mitad la energía cinética se reduce hasta una cuarta parte.



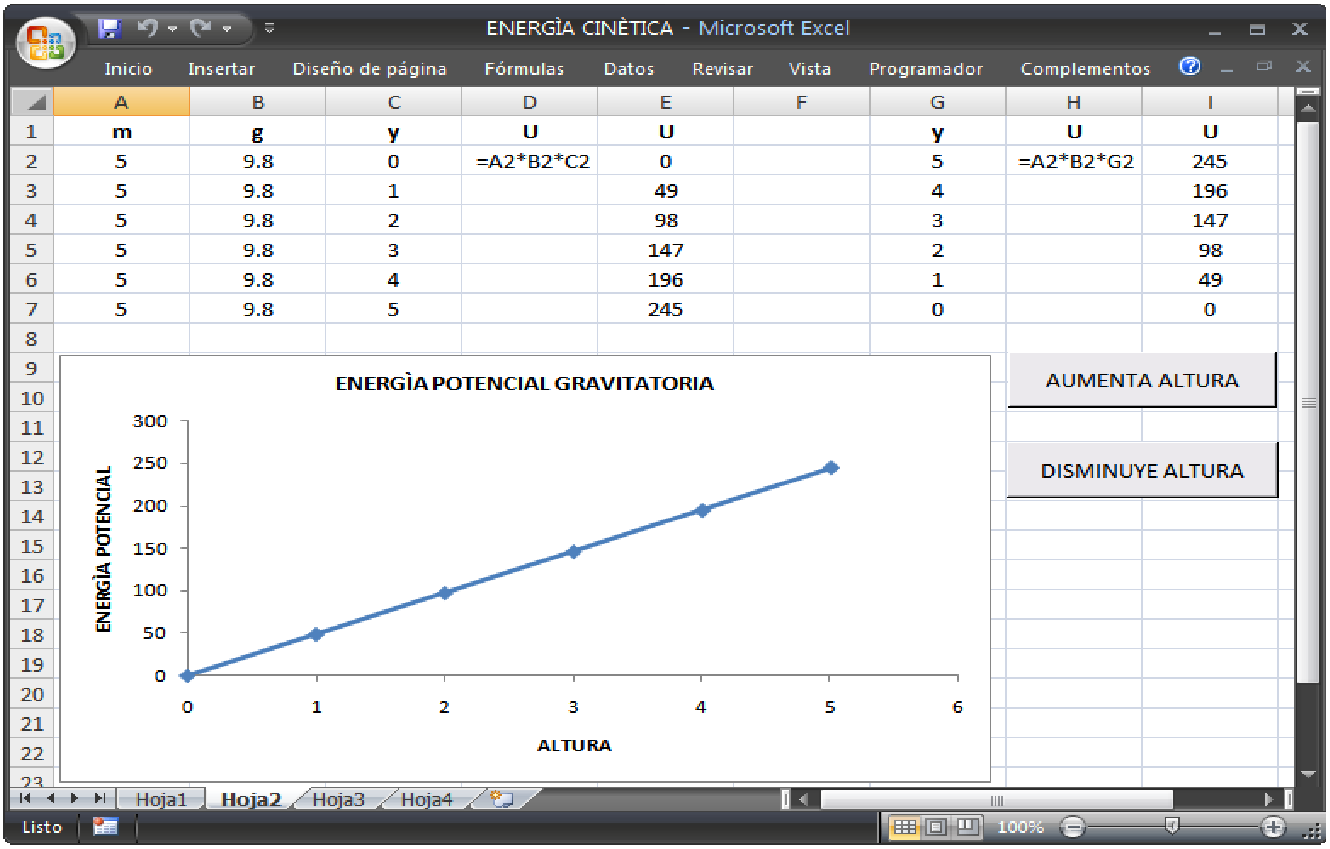
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	m	v	K	K		v	K	K
2	5	0	=1/2*A2*B2^2	0		5	=1/2*A2*F2^2	62.5
3	5	1		2.5		4		40
4	5	2		10		3		22.5
5	5	3		22.5		2		10
6	5	4		40		1		2.5
7	5	5		62.5		0		0

EJEMPLO (Energía Potencial Gravitatoria)

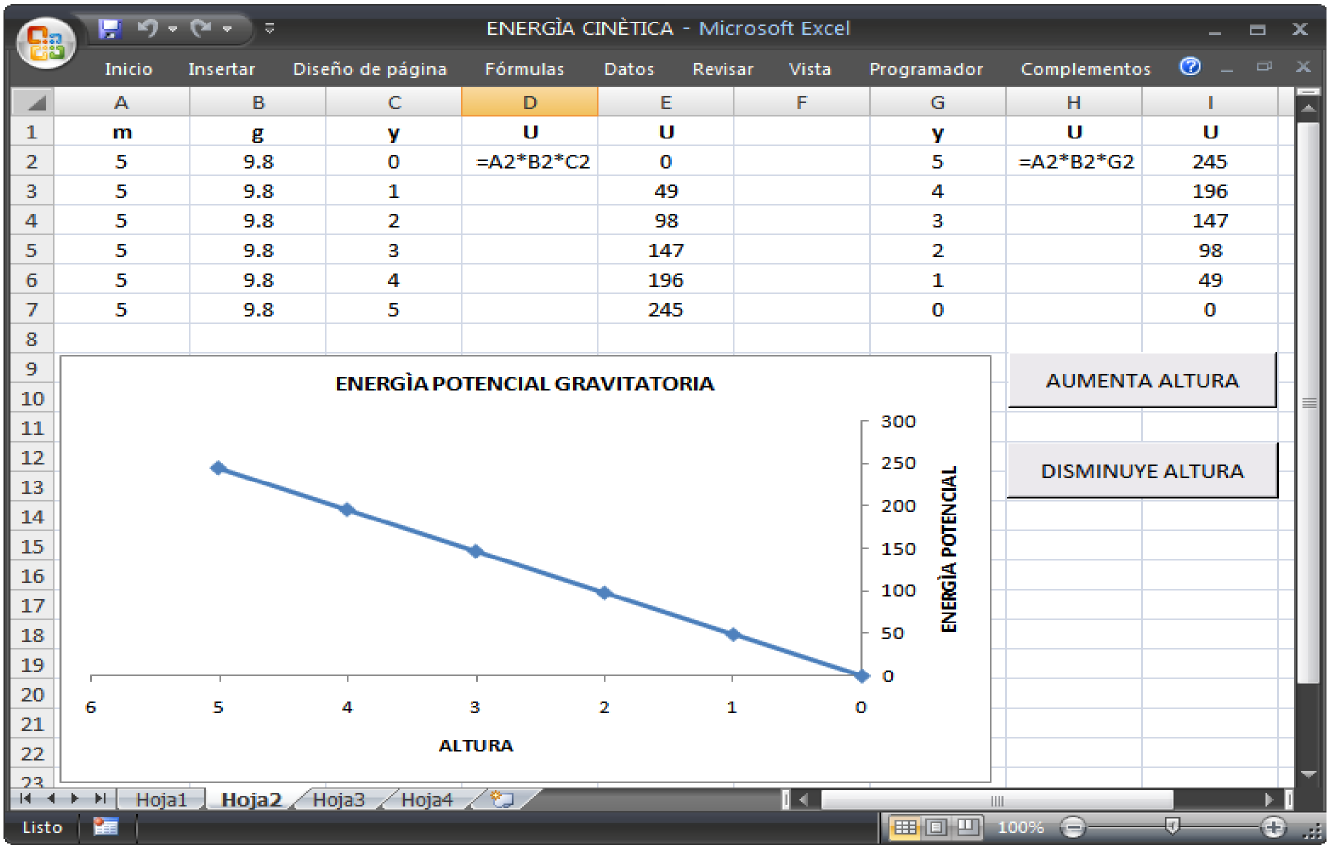
La energía potencial de un cuerpo aumenta cuando aumenta la altura a la que se encuentra respecto del nivel de referencia. La relación **energía – altura** es lineal, es decir que si la altura se duplica la energía potencial también se duplica.

Si la altura se reduce a la mitad la energía potencial también se reduce a la mitad. A una altura de cero, en el nivel de referencia, el cuerpo no tiene energía gravitatoria.

Cada botón tiene asociado una macro para cambiar el rango de datos del gráfico. Sólo una gráfica es mostrada a la vez dependiendo del botón que reciba un clic.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	m	g	y	U	U		y	U	U
2	5	9.8	0	=A2*B2*C2	0		5	=A2*B2*G2	245
3	5	9.8	1		49		4		196
4	5	9.8	2		98		3		147
5	5	9.8	3		147		2		98
6	5	9.8	4		196		1		49
7	5	9.8	5		245		0		0

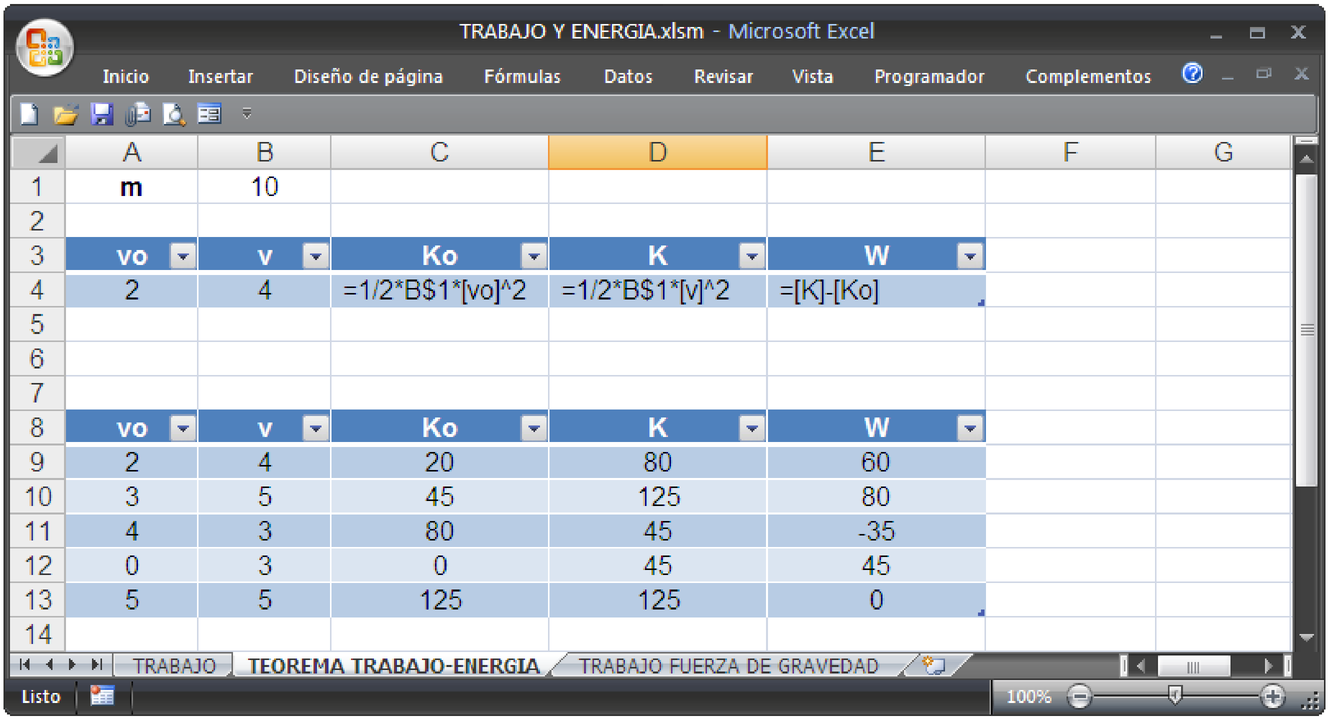


EJEMPLO (Teorema del trabajo y la energía cinética)

El trabajo desarrollado sobre un cuerpo es igual al cambio en su energía cinética. Cuando la velocidad es constante no hay fuerza resultante y el trabajo es igual a cero.

Si la velocidad disminuye el trabajo es negativo y la fuerza retardadora.

Los campos Ko, K y W de la tabla son calculados. Clic en cualquiera de los botones abrir menú permite hacer filtros o colsultas de datos. Para ingresar datos usando un formulario se debe dar clic sobre la tabla y después en el icono **formulario**.



	A	B	C	D	E
1	**m**	10			
2					
3	vo	v	Ko	K	W
4	2	4	=1/2*B$1*[vo]^2	=1/2*B$1*[v]^2	=[K]-[Ko]

	A	B	C	D	E
8	vo	v	Ko	K	W
9	2	4	20	80	60
10	3	5	45	125	80
11	4	3	80	45	-35
12	0	3	0	45	45
13	5	5	125	125	0

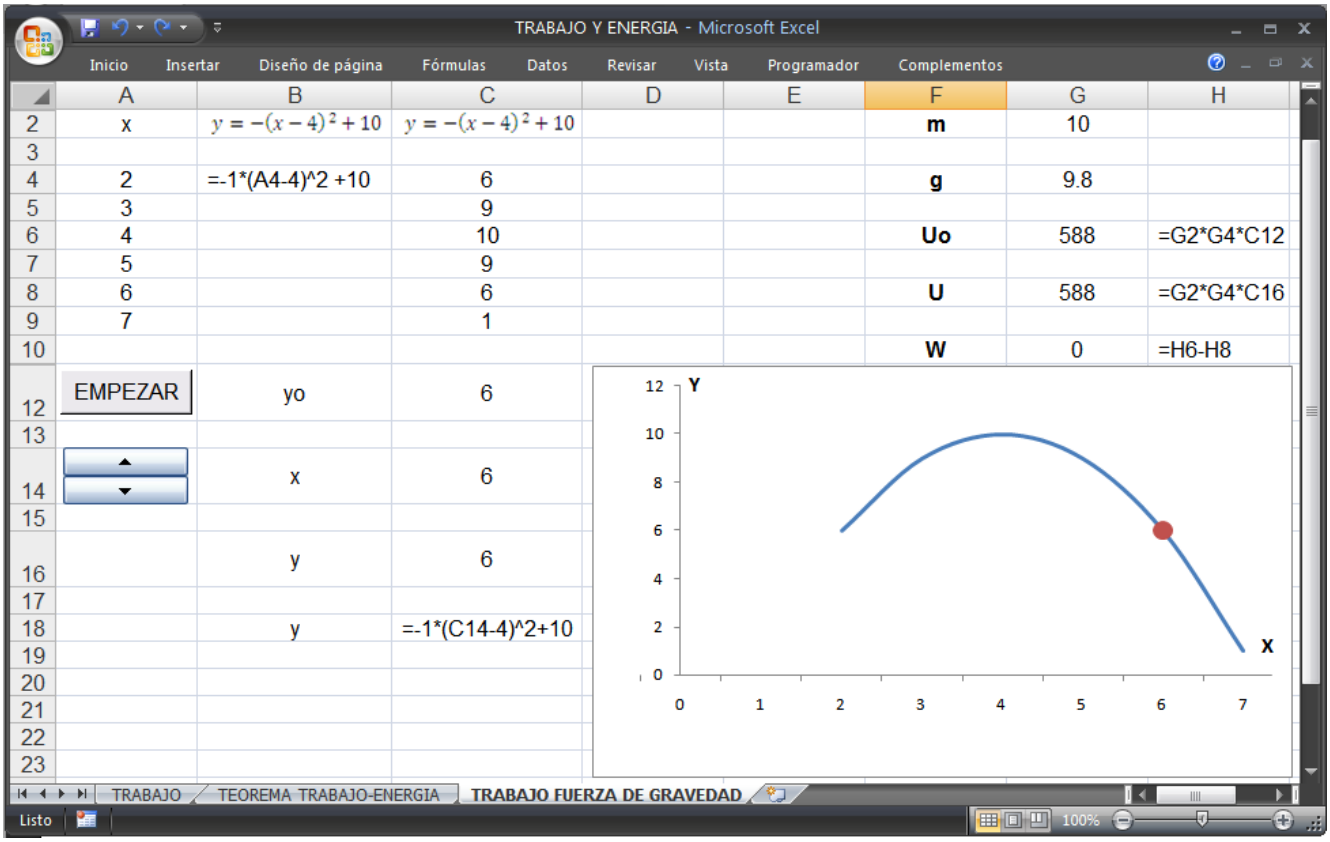
EJEMPLO (Trabajo realizado por la fuerza de gravedad)

El ejemplo muestra que el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad al desplazar un cuerpo de un punto hacia otro del campo gravitacional es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitatoria.

Si la diferencia de alturas es cero el trabajo también es cero. Cuando el desplazamiento es hacia la Tierra el trabajo es positivo y efectuado por la fuerza de gravedad.

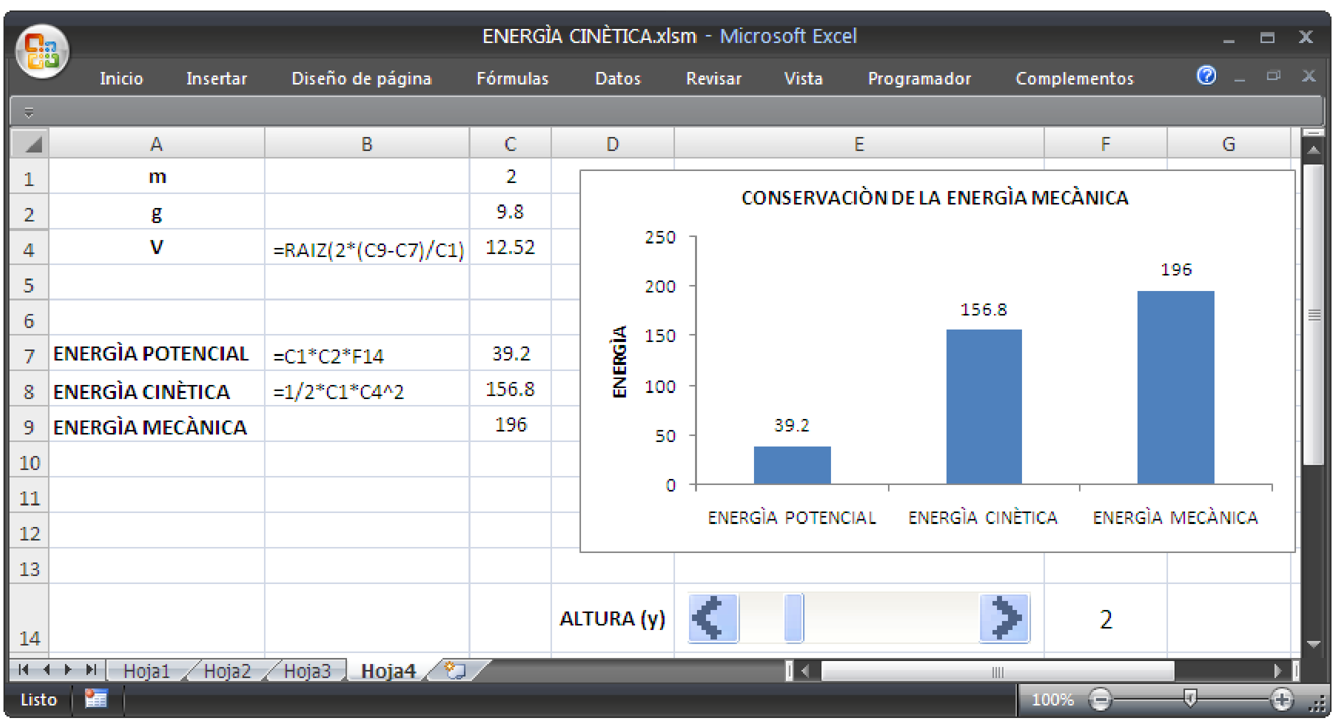
El botón está asociado con una macro que sustituye el contenido de la celda C14 por 2, que es la abcisa del primer punto de la trayectoria de la masa (punto rojo). La gráfica tiene dos series de datos, la primera A4:A9,C4:C9 para la trayectoria curva y la segunda las coordenadas de la posición de la masa C14 y C16.

El control de número está vinculado a la celda C14 y cambia la posición de la masa en la gràfica.



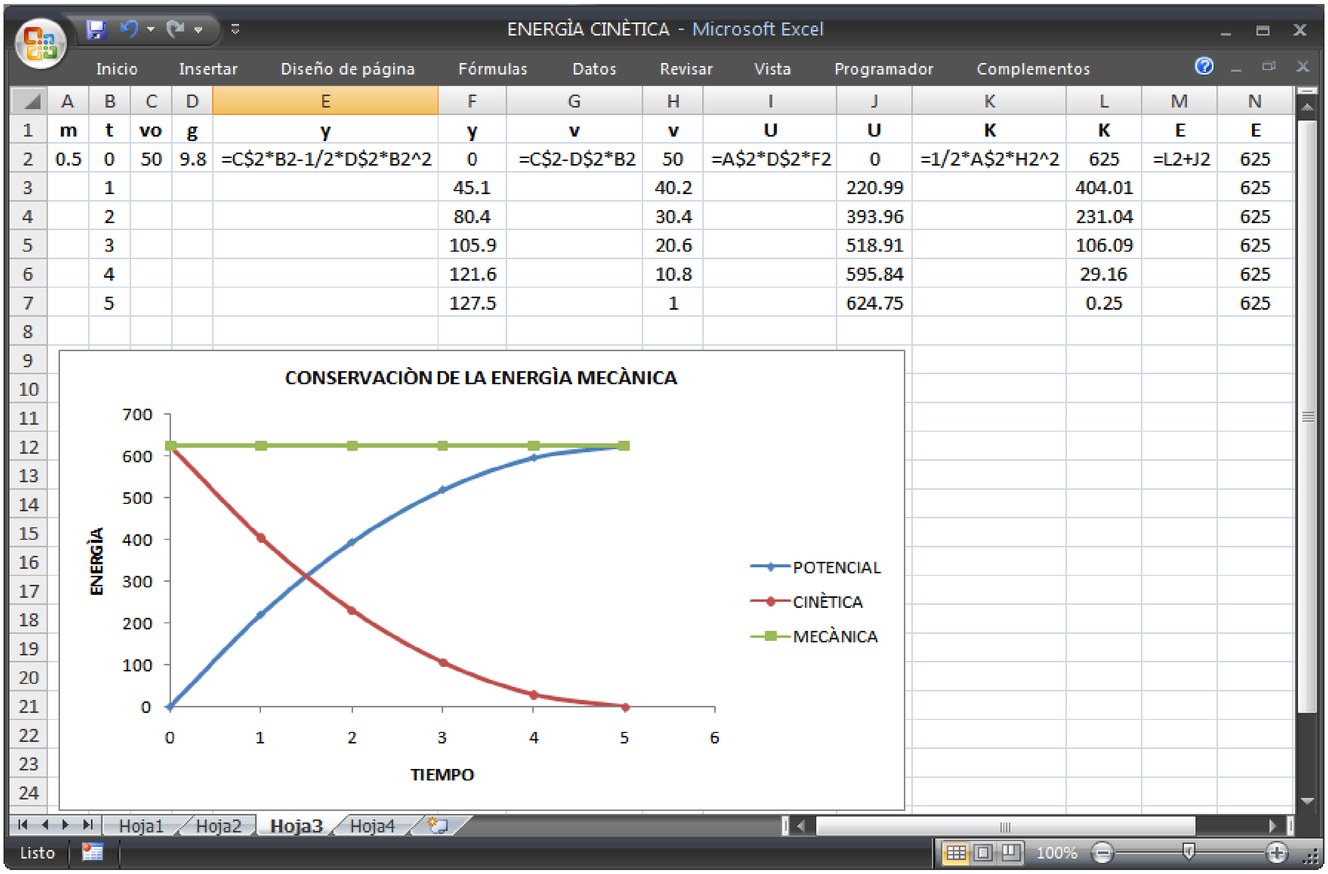
EJEMPLO (Conservación de la energía mecánica)

La barra de desplazamiento está vinculada a la celda F14 y cambia la altura o posición de la masa, ello aumenta o disminuye la energía potencial gravitatoria. Si la energía gravitatoria aumenta la cinética disminuye. La energía mecánica no cambia.



EJEMPLO (Conservación de la energía mecánica)

Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la Tierra (nivel de referencia). La energía potencial gravitatoria aumenta porque el cuerpo gana altura y la energía cinética disminuye porque la rapidez disminuye. La energía mecánica se mantiene constante.



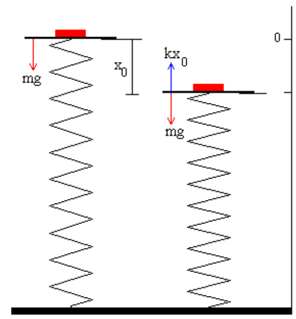
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	m	t	vo	g	y	y	v	v	U	U	K	K	E	E
2	0.5	0	50	9.8	=C$2*B2-1/2*D$2*B2^2	0	=C$2-D$2*B2	50	=A$2*D$2*F2	0	=1/2*A$2*H2^2	625	=L2+J2	625
3		1				45.1		40.2		220.99		404.01		625
4		2				80.4		30.4		393.96		231.04		625
5		3				105.9		20.6		518.91		106.09		625
6		4				121.6		10.8		595.84		29.16		625
7		5				127.5		1		624.75		0.25		625

CAPÍTULO X

10. MOVIMIENTO OSCILATORIO

Ejemplos de èste movimiento son: las oscilaciones de una masa unida a un resorte, el movimiento pendular, las vibraciones de un instrumento musical de cuerda, etc.

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es proporcional al desplazamiento a partir de la posición de equilibrio y está dirigida hacia esa posición.



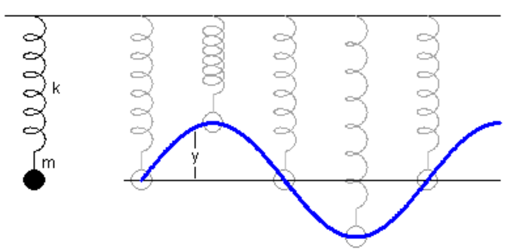
10.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un cuerpo se mueve sobre el eje x , la energía mecánica se conserva y el desplazamiento x varía con el tiempo como indica la ecuación siguiente.

$$x = Acos(\omega t + \phi)$$

La constante A expresa el desplazamiento máximo de la masa respecto de su posición de equilibrio.

Una masa unida a un resorte tiene movimiento armónico simple. ω es la frecuencia angular y el cociente ϕ/ω se llama corrimiento de fase.



Periodo, Frecuencia y Frecuencia Angular

El período T es el tiempo que el cuerpo en movimiento requiere para efectuar una oscilación.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frecuencia f es el número de oscilaciones que el cuerpo realiza en la unidad de tiempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

El análisis del Movimiento Armónico Simple es semejante al del movimiento circular uniforme. Por ello la constante ω es el desplazamiento angular por unidad de tiempo, la velocidad angular.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

<u>Velocidad</u>

La velocidad es máxima cuando la masa pasa por el punto de equilibrio y cero en los extremos de la trayectoria. Cuando el desplazamiento aumenta la velocidad disminuye y cuando el desplazamiento disminuye la velocidad aumenta. El valor máximo es ωA .

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \phi)$$

<u>Aceleración</u>

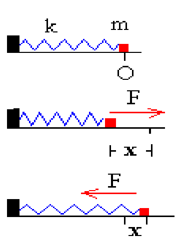
La aceleración de la masa es proporcional a la fuerza y está en dirección de la fuerza. Es cero en el punto de equilibrio, aumenta cuando el desplazamiento aumenta (la fuerza aumenta) y disminuye cuando el desplazamiento disminuye. Alcanza su valor máximo en los extremos de la trayectoria. El valor máximo es $\omega^2 A$.

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto.

10.2. <u>LEY DE HOOKE</u>

La fuerza que un resorte ejerce sobre una masa unida a él es linealmente proporcional a su deformación y de sentido contrario.



La fuerza está dada por la expresión siguiente.

$F = -kx \qquad k = Constante\ de\ fuerza\ del\ resorte$

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa.

$$F = -kx = ma \qquad \rightarrow \qquad a = -\frac{k}{m}x$$

$$Haciendo \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad se\ tiene\ que \qquad a = -\omega^2 x$$

La última ecuación muestra que la aceleración de la masa es linealmente proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto.

El período y la frecuencia se pueden expresar así:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad y \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

El período y la frecuencia dependen de la masa y de la constante de fuerza del resorte. Para grandes valores de k el período es pequeño y la frecuencia grande. Lo contrario ocurre con grandes masas.

10.3. ENERGÍA TOTAL DE UN OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Energía Cinética

Es la energía asociada con el movimiento de la masa unida al resorte.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}\right)A^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

$$K = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

Energía Potencial Elástica

Energía almacenada en el resorte cuando la masa no està en la posiciòn de equilibrio. Es proporcional al cuadrado de la deformaciòn del resorte.

$$Energìa\ Potencial\ Elàstica = U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[Acos(\omega t + \varphi)]^2$$

$$U_e = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi)$$

<u>Energía Mecánica</u>

Es la suma de las energías cinética y potencial elástica. Depende de la rigidez del resorte y del desplazamiento máximo de la masa.

$$Energìa\ Mecànica = E = K + U_e = \frac{1}{2}kA^2[sen^2(\omega t + \varphi) + cos^2(\omega t + \varphi)]$$

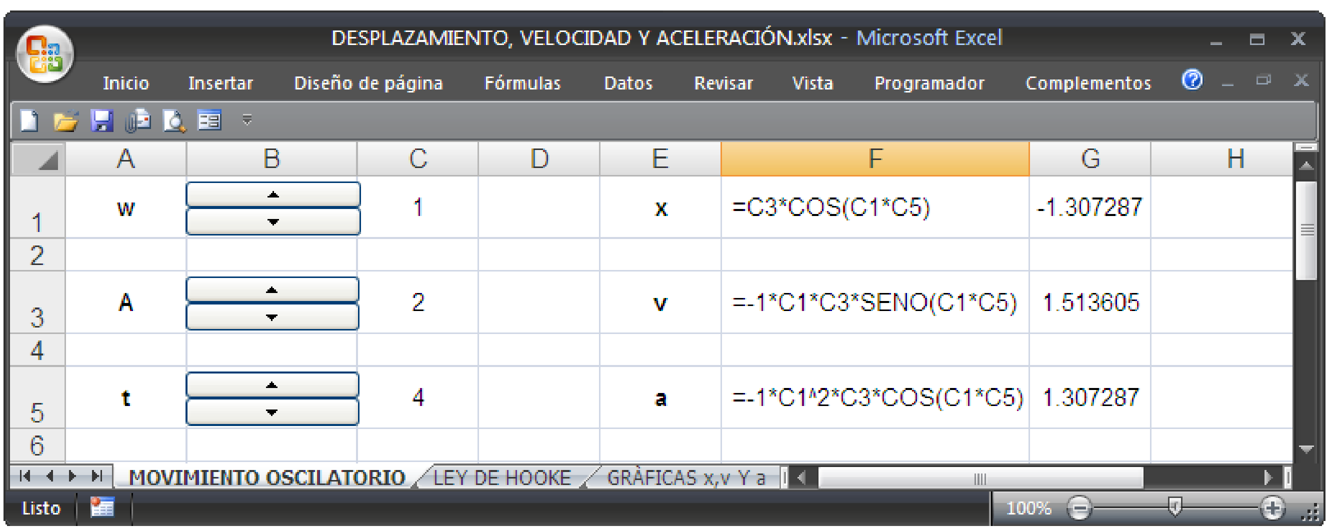
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

La energía mecánica se conserva, es decir que cuando la energía cinética aumenta la energía potencial elástica disminuye. Así $\Delta K = -\Delta U_e$.

<u>EJEMPLO</u> (Desplazamiento, velocidad y aceleración)

Una masa se encuentra unida al extremo de un resorte y oscila teniendo una posición de equilibrio. En el ejemplo se calcula la posición, velocidad y aceleración de la masa en diferentes tiempos.

Para el análisis del movimiento armónico simple de la masa se han insertado tres control de número vinculados a las celdas C1, C3 y C5. Permiten cambiar el valor de la frecuencia angular ω , la amplitud o desplazamiento máximo A y del tiempo t .

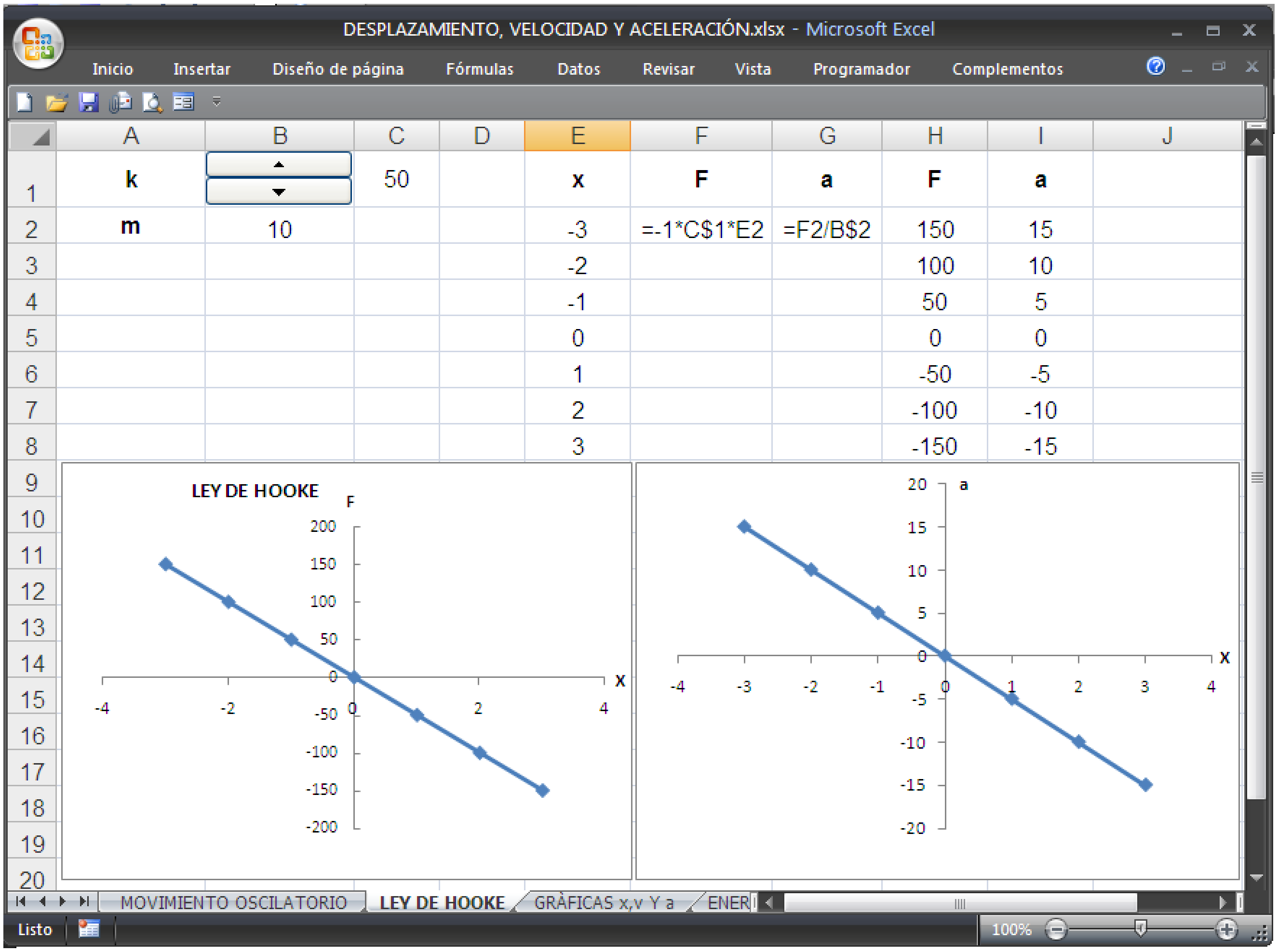


EJEMPLO (Ley de Hooke)

La fuerza que el resorte ejerce sobre la masa es proporcional al desplazamiento. Cuando la masa está en la posición de equilibrio la fuerza es cero y aumenta cuando aumenta el desplazamiento. Lo mismo sucede con la aceleraciòn.

Si cambia el valor de la constante de fuerza k cambia la magnitud de la fuerza. Para resortes más rígidos la fuerza es mayor.

El control número está vinculado a la celda C1 y se utiliza para cambiar la constante de fuerza del resorte.



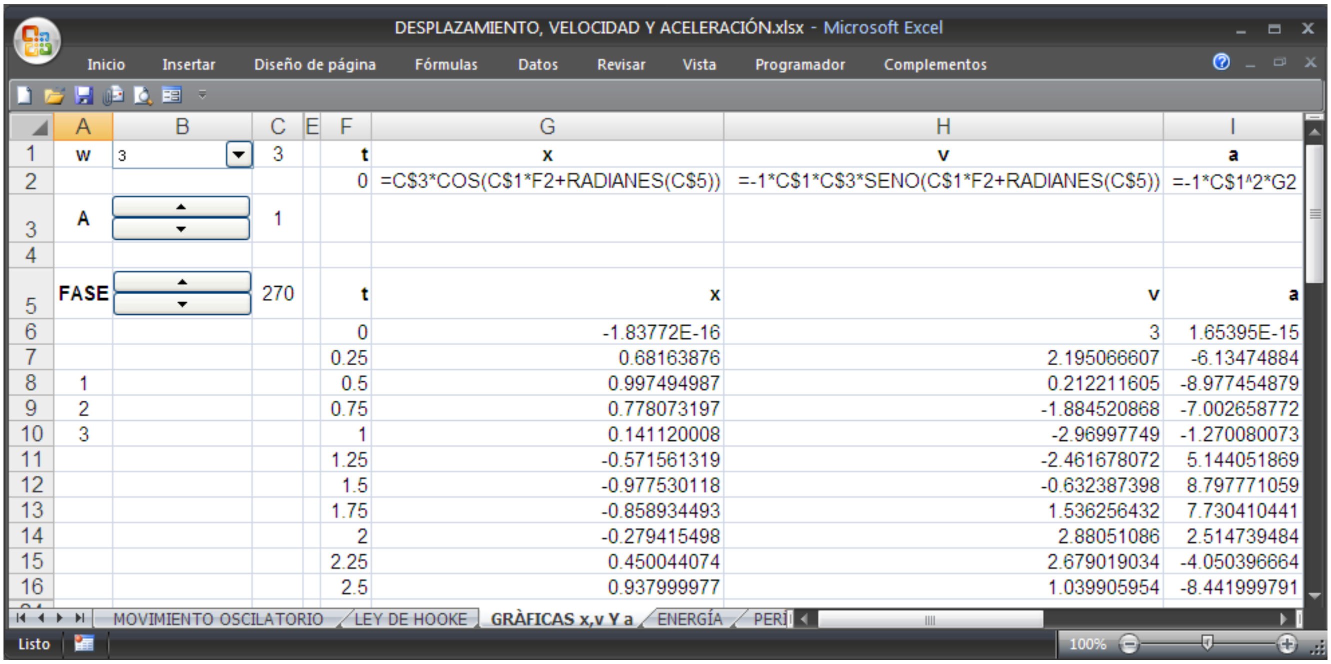
EJEMPLO (Desplazamiento, velocidad y aceleración)

Las gráficas muestran que cuando el desplazamiento es máximo la aceleración es máxima y la velocidad cero. En la posición de equilibrio la masa alcanza la máxima velocidad y su aceleración es cero pues la fuerza que la produce también es cero.

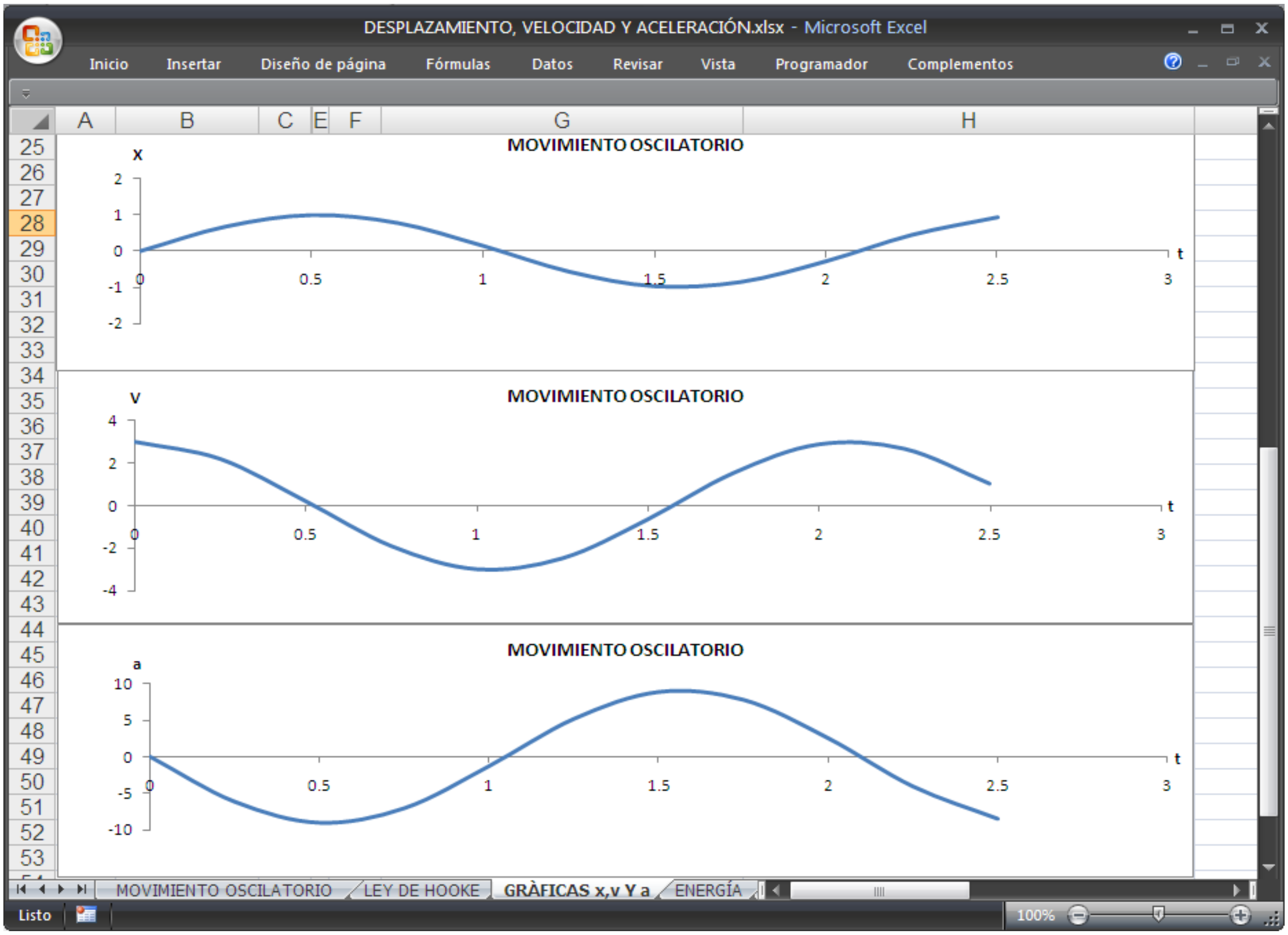
El cociente $\frac{fase}{\omega} = 90^{\mathbf{0}} = \frac{\pi}{2} rad$ es el corrimiento de fase de la gráfica.

El cuadro combinado está vinculado a la celda C1 y el rango de entrada es A8:A10. Se utiliza para hacer variar la frecuencia angular.

Los controles de número han sido vinculados a las celdas C3 y C5 y permiten cambiar el desplazamiento máximo de la masa y la fase de su movimiento armónico simple. Las gráficas se actualizan cuando cambian la frecuencia angular, la amplitud o la fase.



	A	B	C	E	F	G	H	I
1	w	3	3		t	x	v	a
2					0	=C$3*COS(C$1*F2+RADIANES(C$5))	=-1*C$1*C$3*SENO(C$1*F2+RADIANES(C$5))	=-1*C$1^2*G2
3	A		1					
4								
5	FASE		270		t	x	v	a
6					0	-1.83772E-16	3	1.65395E-15
7					0.25	0.68163876	2.195066607	-6.13474884
8	1				0.5	0.997494987	0.212211605	-8.977454879
9	2				0.75	0.778073197	-1.884520868	-7.002658772
10	3				1	0.141120008	-2.96997749	-1.270080073
11					1.25	-0.571561319	-2.461678072	5.144051869
12					1.5	-0.977530118	-0.632387398	8.797771059
13					1.75	-0.858934493	1.536256432	7.730410441
14					2	-0.279415498	2.88051086	2.514739484
15					2.25	0.450044074	2.679019034	-4.050396664
16					2.5	0.937999977	1.039905954	-8.441999791



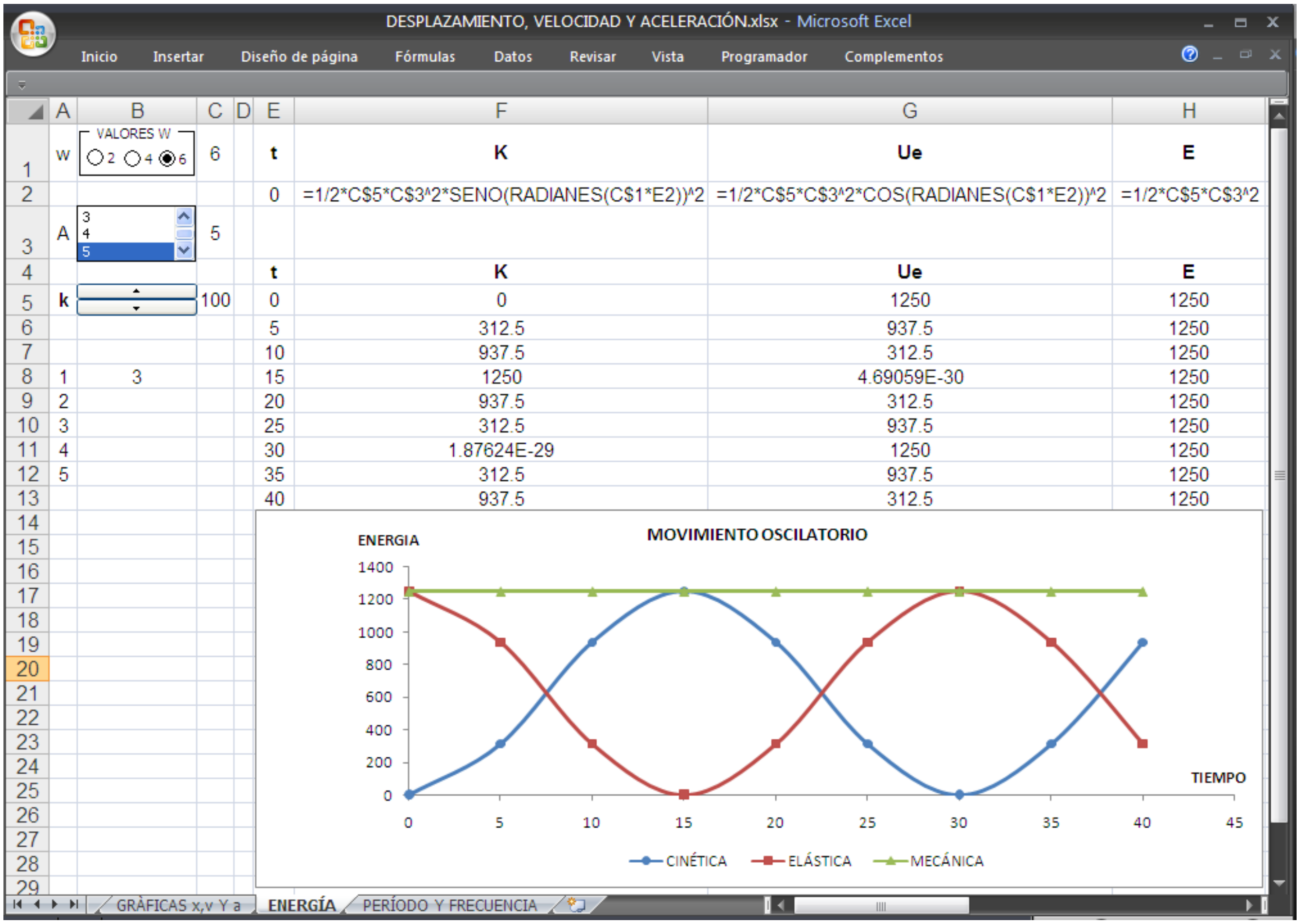
EJEMPLO (Energía Mecánica)

La energía mecánica de un oscilador armónico simple se conserva. La suma de las energías potencial elástica y cinética es constante a través del tiempo.

En los extremos de la trayectoria la energía elástica es máxima y la energía cinética cero (la deformación del resorte es máxima y la masa está en reposo). En la posición de equilibrio la energía cinética es máxima y la energía potencial elástica cero (la masa alcanza la máxima velocidad y el resorte no está deformado).

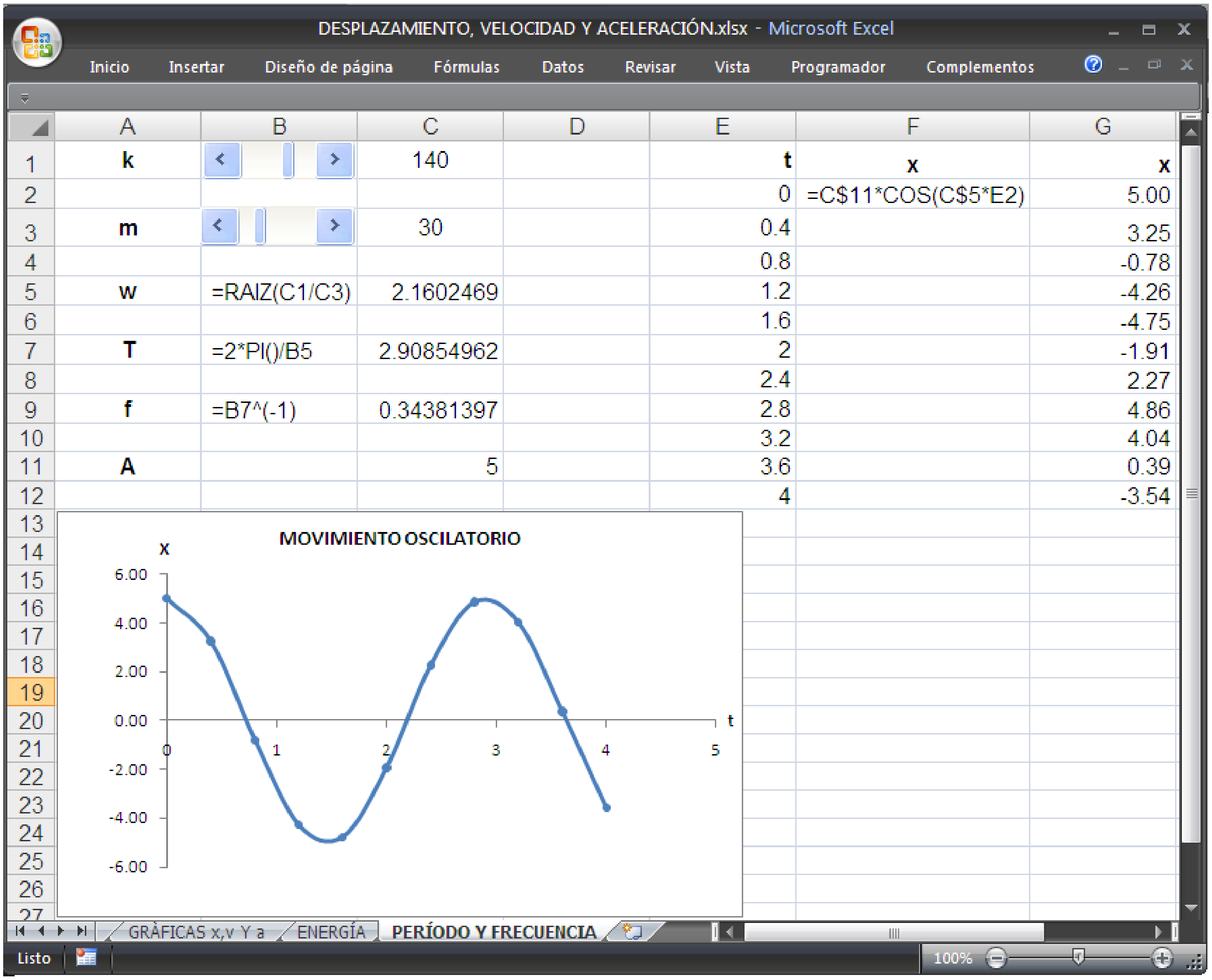
Para el análisis de la energía mecánica del oscilador se usan botones de opción, cualquiera de ellos se debe vincular a la celda B8. La fórmula escrita en la celda C1 es **=2*B8**.

El cuadro de lista se ha vinculado a la celda C3 y el rango de entrada es A8:A12. El control de número está vinculado a la celda C5. Estos controles de formulario se utilizan para hacer variables la frecuencia angular, la amplitud y la constante de fuerza del resorte.



EJEMPLO (Período y frecuencia)

Las barras de desplazamiento permiten variar la constante de fuerza del resorte y la masa. Cuando esas cantidades cambian la gráfica se actualiza.



La gráfica, para los valores mostrados, indica que el período del movimiento armónico simple del oscilador es 2.91 segundos y que la frecuencia es 0.34 Hz.

CONCLUSIONES

1. Se pueden utilizar hojas electrónicas en la enseñanza de la Matemática, Estadística y Física.

2. La presentación de conceptos y definiciones de Matemática, Estadística y Física es atractiva mediante el uso de hojas electrónicas de cálculo.

3. Las hojas electrónicas son de fácil utilización y disponen de muchas herramientas que estudiantes y docentes deben aprovechar en el estudio de la Matemática, Estadística y Física.

4. El uso de hojas electrónicas es importante para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, Estadística y Física.

5. Docentes deben hacer uso de la Informática en la enseñanza y aplicación de la ciencia para lograr la formación integral de los estudiantes.

RECOMENDACIONES

1. Los centros educativos deben utilizar la Informática en la enseñanza de la Matemática, Física y Estadística.

2. Catedráticos de Informática tienen que incluír en sus programas de estudio aplicaciones matemáticas, estadísticas y físicas.

3. Catedráticos de Física deben utilizar la representación gráfica interactiva de fenómenos para mejorar en los estudiantes la comprensión de las leyes naturales.

4. Enseñar procesos estadísticos mediante el uso de hojas electrónicas.

5. Incluír en los programas de estudio de Matemática la utilización de funciones de cálculo de hojas electrónicas.

BIBLIOGRAFÌA

1	Suger, Morales y Pinot	Introducción a la Matemática Moderna (2da. Edición) Editorial Limusa México 1981
2	June Jamrich Parsons y Dan Oja	Conceptos de Computación (6ta. Edición) Editorial Thomson México 2003
3	Peter Norton	Introducción a la Computación Editorial McGraw Hill México 1995
4	Stanley Grossman	Álgebra Lineal con aplicaciones (4ta. Edición) Editorial McGraw Hill México 1994
5	Seymour Lipschutz	Álgebra Lineal (Serie Schaum) Editorial McGraw Hill México 1987
6	Carlos Morales Felgueres	Elementos de Matemáticas Financieras (6ta. Edición) Editorial ECASA México 1973
7	Frank Ayres Jr.	Matemáticas Financieras (Serie Schaum) Editorial McGraw Hill México 1985
8	Richard Johnsonbaugh	Matemáticas Discretas Grupo Editorial Iberoamérica México 1986
9	Seymour Lipschutz	Matemáticas Finitas (Serie Schaum) Editorial McGraw Hill México 1979
10	Earl Swokowski y Jeffery Cole	Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (11a. Ed.) Editorial Thomson México 2006
11	James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson	Precálculo (5ta. Edición) Editorial Thomson México 2007
12	Murray R. Spiegel	Estadística (Serie Schaum) Editorial McGraw Hill
13	William Mendenhall, Robert J. Beaver	Introducción a la Probabilidad y Estadística

	y Bárbara M. Beaver	Editorial Thomson México 2002
14	Johnson y Kuby	Estadística Elemental (10a. Edición) Editorial Thomson México 2008
15	Serway y Faughn	Física (6ta. Edición) Editorial Thomson México 2005
16	Paul G. Hewitt	Física Conceptual (9a. Edición) Editorial Pearson Addison Wesley México 2004

GLOSARIO

EDUCACIÓN

Es el proceso de socialización de los individuos. Al educarse, una persona asimila y aprende conocimientos.

El proceso educativo se materializa en una serie de habilidades y valores, que producen cambios intelectuales, emocionales y sociales en el individuo. *

PEDAGOGÍA

Es el conjunto de saberes que se encarga de la educación como fenómeno tipicamente social y especificamente humano. *

ENSEÑANZA

Es la acción y efecto de instruír. Se trata del sistema y método de dar instrucción, formado por el conjunto de conocimientos, principios e ideas que se enseñan a alguien.

La enseñanza implica la interacción de tres elementos: profesor, alumno y objeto de conocimiento. El docente es un facilitador del conocimiento, actúa como nexo entre éste y el estudiante por medio de un proceso de interacción. *

MÉTODO

Modo ordenado y sistemático de proceder para llegar a un resultado o fin determinado. *

METODOLOGÍA

Conjunto de estrategias, procedimientos, métodos o actividades intencionadas, organizadas, secuenciadas e integradas, que permitan el logro de aprendizajes significativos y de calidad en los estudiantes. *

METODOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA Y FÍSICA USANDO HOJAS ELECTRÓNICAS

Consiste en la presentación de conceptos y definiciones, ejemplificación desarrollando procedimientos completos y luego simplificados mediante la utilización de funciones y otras herramientas de hojas de cálculo electrónico. El análisis de resultados es parte fundamental de la metodología. La presentación gráfica e interactiva es usada para facilitar el estudio de la Matemática, Estadística y Física.

********** TERMINADA LA REVISIÓN DE ESTILO**

Guatemala, 27 de mayo 2016

Msc. Bayardo Mejía

Decano FACED

Universidad Galileo

Estimado maestro Bayardo:

Por medio de la presente, se deja constancia que el presente trabajo de graduación se pública en el Tesario de la Universidad Galileo sin la respectiva carta individualizada del autor, pues a la fecha y luego de muchos intentos de ubicar al autor, este no se ha presentado a la entrega de la misma y no ha sido localizado el ahora profesional para completar el tramite requerido por la Universidad Galileo.

No obstante la Facultad de Educación reconoce como autor al estudiante que se consigna en la portada y en la respectiva carta enviada al Decano la cual puede observarse en las primeras hojas de la investigación.

Por lo anterior expresa que es el resultado de un proceso sustentado mediante el protocolo de FACED del respectivo año, establecidos en el Reglamento de la Universidad Galileo y declara responsable del contenido a su autor y los derechos de autor de los trabajos consultados para realizar la investigación han sido respetados.

Sin otro particular, me suscribo.

Lizbeth Barrientos

Centro de Investigaciones FACED

LLNH /llbh