MIGUEL AUDELIO VELÁSQUEZ GARCÍA

"ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO"

UNIVERSIDAD GALILEO

FACULTAD DE EDUCACION

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN DE LA MATEMÁTICA

Y LA FÍSICA

QUETZALTENANGO, 2018

MIGUEL AUDELIO VELÁSQUEZ GARCÍA

"ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO"

UNIVERSIDAD GALILEO

FACULTAD DE EDUCACION

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN DE LA MATEMÁTICA

Y LA FÍSICA

QUETZALTENANGO, 2018

Este trabajo fue elaborado por el autor, como requisito previo a obtener el grado académico de licenciado en educación de la matemática y la física.

Quetzaltenango 2018

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo

A mi esposa Blanqui Aguilar de Velásquez

Por su ayuda incondicional y apoyo moral durante mi carrera

A mis hijos Luis Alberto, Ana Cristina, Nancy Maricela, José Miguel y Donald Antonio.

Por la motivación que me inculcaron para estudiar esta carrera.

RECONOCIMIENTO

A **Dirección y Administración del colegio preuniversitario Galileo de la ciudad de San Marcos.**

Por brindarme la oportunidad de llevar a cabo con sus estudiantes la metodología del presente trabajo.

A **mi asesor: Ing. Aníbal López Mazariegos**

Por su valiosa orientación que me brindó en todo el proceso de elaboración de este trabajo.

A **la Universidad Galileo, especialmente a la Facultad de Educación.**

Por su proyección al implementar estas carreras en la región de occidente.

La Revolución en la Educación

Guatemala, 25 de septiembre de 2018

Señor
Miguel Audelio Velásquez García
Carné 10002074
Presente.

Estimado Sr. Velásquez García:

Tengo mucho gusto en informarle que, después de haber revisado su trabajo de graduación, cuyo título es **"ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO"** y de haber obtenido el dictamen del asesor específico, autorizo la publicación del mismo.

Aprovecho la oportunidad para felicitarlo por el magnífico trabajo realizado, el cual es de indiscutible beneficio para el desarrollo de la Educación en Guatemala.

Atentamente,

FACULTAD DE EDUCACION

MA. BAYARDO MEJÍA MONZÓN
DECANO

7a. Avenida final (Calle Dr. Eduardo Suger Cofiño) Zona 10
Guatemala, Centro América
P.B.X. 2423-8000

Galileo UNIVERSIDAD
La Revolución en la Educación

Guatemala, 12 de septiembre 2018

Magíster: Bayardo Mejía Monzón
Decano de la Facultad de Educación
Presente.

Señor Decano:

Por este medio me permito comunicarle que leí y revisé el trabajo de graduación del alumno, Miguel Audelio Velásquez García, Carné No 10002074, titulada. "ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO, Asesorada por el Ingeniero Mecánico, Aníbal Alonzo López Mazariegos. Colegiado No. 7105

Después de revisarla detenidamente y de hacer las correcciones pertinentes, en mí calidad de Revisora de Redacción, Estilo y Ortografía, le informo que el trabajo de graduación llena los requisitos que exige la Universidad.

Me suscribo del señor decano, como su atenta y segura servidora.

Licda. M.A. Anita Jiménez Herrera
Colegiada No. 5980-

Guatemala 20 de noviembre de 2017

Sr.
Magister: Bayardo Mejía Monzón
Decano Facultad de Educación
Universidad Galileo.

Por medio de la presente le informo que el estudiante Miguel Audelio Velásquez García, con número de carné 10002074 de la licenciatura en Educación de la Matemática y Física finalizó la ejecución del trabajo de graduación que le fue autorizado, denominado **ESTRATEGIA PEDAGOGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO**

El estudiante elaboró el informe siguiendo los lineamientos que la unidad de investigación ha definido para este tipo de trabajo de graduación, cumpliendo con incorporar todas las observaciones que le fueron sugeridas, por lo que me permito presentarle el informe para que se sirva dirigirlo a donde corresponde para continuar con los trámites que la Universidad Galileo tiene para la revisión final del trabajo de graduación.

Sin otro particular se suscribe de usted, su atento servidor.

Atentamente

ANIBAL LOPEZ M.
ING. MECÁNICO
COL 7,105

Ing. Aníbal Alonzo López Mazariegos
Ingeniero Mecánico
Colegiado No. 7105

UNIVERSIDAD
Galileo

FACULTAD DE EDUCACION

Guatemala,
14 de noviembre de 2017

Señor
Miguel Audelio Velásquez García
Carné 10002074
Estudiante de Licenciatura en Educación de la Matemática y la Física
Presente.

Estimado Sr. Velásquez García:

El día de hoy, hemos completado la revisión de su trabajo de graduación, requisito para obtener el grado académico de Licenciado en Educación de la Matemática y la Física, titulado:

"ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO DEL COLEGIO PREUNIVERSITARIO GALILEO, SAN MARCOS, DEPARTAMENTO DE SAN MARCOS."

Observaciones indicadas en la revisión de su trabajo:

a) Reducir el título del trabajo de graduación, de tal forma que el título quede de la siguiente manera:

""ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DIVERSIFICADO."

Aplicar el cambio en todo el documento.

Una vez modifique lo indicado anteriormente, podremos dar por **aceptado** el trabajo de graduación y seguir el proceso de revisión de Redacción y Estilo.

Atentamente,

MA Bayardo A. Mejía Monzón
DECANO

RR

RESUMEN

El presente trabajo está enfocado en la didáctica de la factorización. Se realizó con estudiantes de cuarto bachillerato en ciencias y letras con orientación en ciencias biológicas. El hilo conductor del trabajo ha sido lograr un aprendizaje significativo de la factorización de polinomios algebraicos, mediante una didáctica activa. La didáctica referida incluyó procedimientos prácticos que relacionan la propiedad distributiva de la multiplicación y el factor común, así también la relación entre productos notables y la factorización de binomios y trinomios, y la relación entre cocientes notables y la factorización de binomios formados por la suma o diferencia de potencias de igual grado. Las actividades prácticas permitieron relacionar procedimientos geométricos, aritméticos y algebraicos. La evaluación general final aplicada dio resultados satisfactorios, alcanzando una media de 70% en el aprendizaje, contra un 39.4% alcanzado por un grupo testigo.

Palabras claves: Didáctica, factorización, productos notables, cocientes notables, aprendiz je, polinomios, diversificado, matemáticas, algebra, potenciación.

INDICE

Contenido: **Página:**

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se ha querido reafirmar la importancia de la didáctica aplicada en la enseñanza de la factorización de polinomios, para alcanzar un nivel satisfactorio de aprendizaje en este tema. Se partió de la inquietud de mejorar el nivel de aprendizaje, utilizando en su proceso una metodología más participativa y creativa, para propiciar su aprendizaje en forma más significativa.

Se ha tenido como punto de partida el hecho de que la mayoría de los estudiantes que ingresan al cuarto grado del nivel medio, primer año del ciclo diversificado, manifiestan deficiencia en el conocimiento de la factorización de polinomios algebraicos, y es necesario promover en ellos un aprendizaje eficiente de dicho tema, ya que es fundamental para estudiar con éxito temas posteriores, tales como la resolución de ecuaciones con denominadores polinómicos, resolución de ecuaciones cuadráticas, suma de expresiones algebraicas fraccionarias, entre otros, y su utilización en el estudio de la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, y con ello fortalecer su formación académica en el área de matemática y sub áreas afines, para un buen desempeño en sus estudios de quinto bachillerato y del nivel universitario.

Se trabajó con un grupo de 132 estudiantes divididos en cuatro secciones que estudian el primer año de la carrera de bachiller en ciencias y letras con orientación en ciencias biológicas en el colegio preuniversitario Galileo, ubicado en la 12 avenida 3-33, zona 4 de la ciudad de San Marcos, a quienes se les orientó su aprendizaje de la factorización de polinomios algebraicos con la metodología que les ayudó a redescubrir las reglas matemáticas básicas de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, productos y cocientes notables y su correspondiente proceso de factorización, y su aplicación en casos específicos, utilizando para ello procedimientos geométricos, aritméticos y algebraicos estrechamente relacionados.

Este trabajo de enseñanza aprendizaje se llevó a cabo del 2 de mayo al 12 de julio del año 2017. Se fue evaluando periódicamente el desempeño de los estudiantes y los procedimientos didácticos aplicados. Al concluir con el trabajo previsto en este proceso se practicó una evaluación escrita de aplicación de las distintas reglas de factorización y sus resultados se analizan comparativamente con los de otro grupo de 46 estudiantes del mismo colegio y del primer año diversificado en las carreras de perito en computación, perito en diseño gráfico, y bachillerato en computación, quienes han estudiado el mismo tema de la factorización sin el acceso a la metodología que se aplicó al grupo indicado con anterioridad.

El análisis de los resultados ha permitido formular recomendaciones concretas para la enseñanza de la factorización, tanto en el ciclo de educación básica, como en el diversificado, ambos del nivel de educación media de nuestro sistema educativo nacional.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

Los estudiantes al iniciar el ciclo diversificado manifiestan deficiencia en el conocimiento y dominio de la factorización o descomposición de polinomios algebraicos en factores. Este tema se vuelve a enseñar en cuarto grado del nivel medio, o sea primer año del ciclo diversificado, de conformidad con el currículo nacional base, estructurado por el Ministerio de Educación, pero muy pocos estudiantes progresan en el aprendizaje, lo cual se evidencia al tratar otros temas como la resolución de ecuaciones con denominadores polinómicos, ecuaciones cuadráticas, suma de expresiones algebraicas fraccionarias, entre otros. Se ha llegado a determinar que los estudiantes que no alcanzan las competencias previstas como resultado del estudio de este tema, tienen bajo nivel de dominio de otros temas que se estudian posteriormente a éste.

La problemática indicada tiene relación con la forma en que se lleva a cabo el proceso enseñanza aprendizaje de la factorización, pues en muchos casos se ha limitado a presentar el enunciado de reglas o formas establecidas para los distintos casos de factorización y su posterior aplicación en ejercicios, sin tener en cuenta el origen de dichas reglas, es decir, se ha trabajado en forma deductiva y descuidando la inducción.

Para superar esta deficiencia se estimó necesario retomar la metodología que permite redescubrir las reglas que determinan los procedimientos ya establecidos, reafirmando así tales reglas y procedimientos, para luego aplicarlos a ejercicios y casos particulares, fortaleciendo así el aprendizaje significativo.

Se definieron entonces las variables:

- Pedagogía
- Didáctica aplicada en la enseñanza de la factorización.
- Aprendizaje significativo
- Competencias

CAPÍTULO III

JUSTIFICACION

En muchos casos, el proceso enseñanza aprendizaje de la descomposición en factores de polinomios algebraicos, se ha limitado a presentar al estudiante un procedimiento ya establecido de la forma de factorizar los distintos polinomios y luego aplicar dichos procedimientos a la resolución de ejercicios propuestos. Esta ha sido una de las causas de que unas semanas después, el estudiante ha olvidado tales procedimientos, o recuerda unas pocas partes. Se ha creído necesario, pues, fortalecer los procedimientos de aprendizaje de la factorización de polinomios, mediante una didáctica activa y participativa que coadyuven a un aprendizaje significativo del tema aludido.

Siendo el tema de la descomposición de polinomios en factores uno de los más importantes a este nivel, tanto es así, que varios autores de libros que se han escrito para estos grados, señalan como teorema fundamental del álgebra el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de polinomios algebraicos, temas que precisan aplicar con eficiencia la descomposición en factores, se deduce la necesidad impostergable de ofrecer a los estudiantes oportunidades de aprender significativamente el tema mencionado, para poder continuar su aprendizaje en el área de matemáticas, ya que temas que se deben estudiar posteriormente, necesitan de su aplicación eficiente, tales como los temas de la resolución de ecuaciones con denominadores polinómicos, resolución de ecuaciones cuadráticas, suma de expresiones algebraicas fraccionarias, entre otros.

Se propuso como solución de estos problemas, trabajar con los grupos de estudiantes descritos anteriormente, utilizando materiales manipulables elaborados por ellos en cartulina de colores con modelos geométricos que relacionan el área de rectángulos con la expresión factorizada de una expresión algebraica y combinando los modelos geométricos con soluciones algebraicas y comprobaciones aritméticas, sin descartar el material visual por medio de computadora y proyector, todo en forma práctica que ayudaron en la deducción de formulaciones en lenguaje matemático cuya interpretación ha fortalecido la reafirmación de las reglas o procedimientos ya establecidos y poderlos aplicar en situaciones diversas. De esta manera se ha reducido la tendencia a memorizar reglas, que conducen a un aprendizaje fugaz.

En todo el proceso se ha priorizado que los estudiantes redescubran las reglas de la factorización por deducciones originadas de la observación y por ejercitación práctica con material manipulable, y luego han utilizado convenientemente dichas reglas o leyes y procedimientos en la resolución de ejercicios que se les propuso.

Al finalizar las actividades de enseñanza – aprendizaje, se han comprobado mediante una evaluación escrita, las mejoras alcanzadas por los estudiantes en su aprendizaje.

CAPÍTULO IV

OBJETIVOS

4.1 Objetivo general

- Reafirmar el valor de la utilización de estrategias didácticas apropiadas en el proceso enseñanza - aprendizaje de la factorización, para alcanzar un aprendizaje significativo.

4.2 Objetivos específicos

- Mejorar el aprendizaje del tema la factorización de polinomios algebraicos en estudiantes de cuarto bachillerato en ciencias y letras con orientación en ciencias biológicas, del colegio preuniversitario Galileo de la ciudad de San Marcos.
- Implementar una estrategia alternativa para la enseñanza-aprendizaje del tema la factorización mediante la utilización de técnicas y recursos didácticos disponibles.

CAPÍTULO V

DELIMITACION

Las actividades de enseñanza de la factorización de polinomios algebraicos realizadas con los estudiantes como propuesta metodológica, se llevaron a cabo con los estudiantes de las cuatro secciones del cuarto grado de Bachillerato en Ciencias y Letras con Orientación en Ciencias Biológicas, del Colegio Preuniversitario Galileo, de la Ciudad de San Marcos, y abarcaron la retroalimentación de temas previos que son necesarios reforzar antes de la factorización, tales como productos y cocientes de polinomios, propiedades de la suma y producto de polinomios, productos y cocientes notables, áreas de cuadrados y rectángulos, y volumen del cubo; luego se trataron los diferentes casos y procedimientos de factorización de polinomios y su aplicación en operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias. Durante todo el proceso se fue evaluando el avance de los estudiantes en el aprendizaje de los temas y al concluir los temas y subtemas se practicó una evaluación final en forma escrita, con la que se midió el logro de las competencias establecidas.

CAPÍTULO VI

MARCO TEORICO

En primer lugar, se define qué es la Pedagogía, la Didáctica, y la Didáctica apropiada en la enseñanza de la factorización.

6.1 PEDAGOGÍA

La Pedagogía, según el diccionario Larousse ilustrado, “es el arte de instruir y educar al niño. Estudia la educación en todas sus vertientes: escolar, familiar, laboral, social y cultural”. (1980: 780)

Eugenia María de Hostos define a la Pedagogía como una ciencia y un arte. “como ciencia, es la aplicación de las leyes naturales del entendimiento humano al desarrollo de cada entendimiento o razón individual: o de otro modo, es el estudio del orden en que se han de comunicar los conocimientos, fundado en las leyes de la razón”. “Como arte, es el conjunto de recursos y procedimientos que emplean los educadores en la transmisión de conocimientos”. (1991: 57-58)

De las definiciones anteriores puede percibirse que la ciencia pedagógica tiene como objetivo la formación integral de la persona, como un proceso de preparación del ser humano para la vida.

6.2 DIDACTICA

La didáctica está definida en el diccionario Larousse ilustrado como “arte de enseñar”. (1980: 358)

Para Imídeo G. Nérici la didáctica es “ciencia y arte de enseñar”. “es ciencia porque investiga y experimenta nuevas técnicas de enseñanza”, “es arte porque establece normas de acción”. Luego, agrega que: “la didáctica está constituida por un conjunto de procedimientos y normas destinadas a dirigir el aprendizaje de la manera más eficiente que sea posible” (1979:54).

Pérez y Gardey definen la Didáctica como “la disciplina científico-pedagógica que tiene como objeto de estudio los procesos y elementos existentes en la enseñanza y el aprendizaje". Estos autores consideran, entonces, a la Didáctica como "parte de la Pedagogía que se ocupa de las técnicas y métodos de enseñanza, destinados a plasmar en la realidad las pautas de las teorías pedagógicas. La Didáctica, por tanto, pretende fundamentar y orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje". (2012 snp)

En este sentido la didáctica se entiende como la acción que el docente emprende para guiar de manera eficaz el aprendizaje del educando.

La educación, así como otras actividades humanas, han ido cambiando, adaptándose a las circunstancias y los tiempos, lo que hace pensar que también los modelos didácticos han cambiado.

Pérez y Gardey nos refieren que "en la actualidad existen tres modelos didácticos bien diferenciados: el normativo, centrado en el contenido; el incitativo, focalizado en el alumno; y el aproximativo, para quien lo esencial es la construcción que el alumno haga de los nuevos conocimientos". (2012 snp).

6.3 MATEMÁTICA EDUCATIVA

El campo de la didáctica, aplicado a una rama del saber o disciplina científica en particular, lleva a la definición de una didáctica especial. Tal el caso de la didáctica de la matemática o matemática educativa, que estudia las actividades didácticas que tienen por objeto la enseñanza de la matemática.

Rebollar afirma que "la matemática educativa comprende aquellos factores que intervienen y hacen posible que la matemática se enseñe y se aprenda". "En su sentido amplio, no se restringe a la interacción profesor - alumno durante la clase, va más allá, a otros factores que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje". (2000)

Al querer caracterizar la matemática contemporánea, E. Wenzelburger, citado por Rebollar, afirma que "la matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales y cada vez son más importantes las actividades de: observar, explorar, hacer predicciones, probar hipótesis, controlar variables, simular situaciones reales, sin dejar a un lado las actividades de demostrar, generalizar o abstraer"; y afirma que "aprender matemáticas ha dejado de ser la simple acumulación de conceptos, teoremas o procedimientos. Aprender matemáticas es una actividad en la que el sujeto desarrolla o construye ideas, recopila información, descubre o crea relaciones, discute ideas, plantea conjeturas, valora resultados”. (2000)

El doctor Ricardo Cantoral Uriza, en una entrevista concedida a la redacción de la revista informativa de la décimo cuarta reunión latinoamericana de matemática educativa, julio del 2,000, dice, en relación a la matemática educativa que “no interesa solamente cómo hacer que alguien aprenda; interesa también entender cómo tendría que construirse el conocimiento si el fin es su aprendizaje”. (2,000)

Ortiz escribe que, “para conseguir una enseñanza efectiva de la matemática, el profesor debe comprender lo que los estudiantes conocen y lo que necesitan aprender; así se podrán plantear retos y se sabrá apoyarles para aprenderla bien”. Agrega que “los estudiantes aprenden matemática comprendiéndola, construyendo el nuevo conocimiento sobre la base de la experiencia y los conocimientos previos”. (2014:3)

El aprendizaje significativo es el que desarrolla competencias en quien aprende, haciéndole competente para enfrentar con éxito los retos que la vida le presente.

6.4 COMPETENCIA

Martínez, cegarra y Rubio, hacen un acopio de definiciones de competencia en el ámbito educativo, de las que transcribo dos: “competencia es una habilidad para llevar a cabo una tarea, deber o rol adecuadamente. Está relacionada con el trabajo específico en un contexto particular, e integra diferentes tipos de conocimientos, habilidades y actitudes. Se adquiere mediante el aprender haciendo”, “competencia es una aptitud para enfrentar eficazmente una familia de situaciones análogas, movilizando a conciencia y de manera rápida, pertinente y creativa, múltiples recursos cognitivos: saberes, capacidades, informaciones, valores, actitudes, esquemas de percepción y razonamiento” (2012; 378).

De las definiciones anteriores se puede reconocer que una competencia combina habilidades prácticas y conocimientos.

6.5 FACTORIZACIÓN

El presente trabajo se enfocó en la enseñanza-aprendizaje de la factorización, por lo que ha sido necesario definir la factorización y luego esbozar someramente una didáctica para la factorización.

Para la profesora Mónica Castro, "factorizar un polinomio es expresarlo como producto de factores, que, al multiplicarlos todos, resulta el polinomio original" (2004:12).

Aponte, Pagan y Pons definen: "si p(x) es un polinomio y se verifica que p(x) = q(x)*d(x), siendo q(x) y d(x) también polinomios, entonces puede decirse que q(x) y d(x) son factores o divisores de p(x) (1998:230).

Baldor dice que "factores o divisores de una expresión algebraica son las expresiones algebraicas que, multiplicadas entre sí, dan como producto la primera expresión. Así, puesto que $(x + 2)\ (x + 3) = x^2 + 5x + 6$, luego entonces, $x + 2$ *y* $x + 3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$". (1985:143)

Para Baldor "descomponer en factores una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores" (1985:143), y trata el tema de la descomposición factorial en diez casos: "factor común, factor común por agrupación de términos, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados perfectos, trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción, trinomio de la forma x^2+bx+c, trinomio de la forma ax^2+bx+c, cubo perfecto de binomios, suma o diferencia de cubos perfectos y suma o diferencia de dos potencias iguales" (1985:144-170).

Swokowski expone que, "si un polinomio es un producto de otros polinomios, cada polinomio del producto es un factor del polinomio original" y define el término factorizar como "el proceso de expresar una suma de términos como un producto". "Así, como $x^2 - 9 = (x + 3)\ (x - 3)$, entonces $x + 3$ *y* $x - 3$ son factores de $x^2 - 9$". Más propiamente define que "factorizar un polinomio significa expresarlo como el producto de polinomios irreducibles" (2011: 33).

Swokowswi agrupa los procesos de factorización en tres fórmulas, como se ilustra en el siguiente resumen (2,011: 34).

Fórmulas de factorización

Fórmula	Ilustración
(1) Diferencia de dos cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = (3a + 4)(3a - 4)$
(2) Diferencia de dos cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a - 3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$ $= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$
(3) Suma de dos cubos: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3$ $= (5a + 1)[(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2]$ $= (5a + 1)(25a^2 - 5a + 1)$

Cada una de estas formas son ilustradas con los ejemplos descritos a continuación (páginas 34-38)

Ejemplos de Diferencia de Cuadrados.

a. Factorizar el polinomio $25r^2 - 49s^2$

   $25r^2 - 49s^2$ se puede escribir como $(5r)^2 - (7s)^2$, por lo que sus factores son $(5r + 7s)(5r - 7s)$

b. Factorizar el polinomio $81x^4 - y^4$

   $81x^4 - y^4$ se puede escribir como $(9x^2)^2 - (y^2)^2$, por lo que sus factores son

   $(9x^2 + y^2)(9x^2 - y^2)$ y como el segundo factor aún se puede factorizar

$$(9x^2 + y^2)[(3x)^2 - (y)^2]$$

   y equivale a $(9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y)$

c. Factorizar el polinomio $16x^4 - (y - 2z)^2$
   Este polinomio es equivalente a $(4x^2)^2 - (y - 2z)^2$ y sus factores son

$$[(4x^2) + (y - 2z)]\,[(4x^2) - (y - 2z)]$$

   y simplificando los factores quedan

   $(4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z)$

Ejemplos de suma y diferencia de dos cubos:

a. Factorizar el polinomio $a^3 + 64b^3$

   $a^3 + 64b^3$ se puede escribir como $a^3 + (4b)^3$ y es equivalente a

$$(a + 4b)[(a^2) - a(4b) + (4b)^2]$$

   o sea $(a + 4b)(a^2 - 4ab + 16b^2)$

b. Factorizar el polinomio $8c^6 - 27d^9$ este polinomio es equivalente a $(2c^2)^3 - (3d^3)^3$ y sus factores se pueden expresar como

   $(2c^2 - 3d^3)\ [(2c^2)^2 + (2c^2)(3d^3) + (3d^3)^2]$ que simplificados quedan

$(2c^2 - 3d^3)(4c^4 + 6c^2d^3 + 9d^6)$

También explica Swokowski el procedimiento de "factorización de un trinomio de la forma *px^2+qx+r donde p, q* y *r* son enteros, entonces este trinomio debe ser de la forma *px^2+qx+r = (ax+b) (cx+d)* donde *a, b, c* y *d* son enteros. Se deduce que *ac=p. bd=r y ad+bc=q*. sólo un número limitado de opciones para *a, b, c* y *d* satisfacen estas condiciones. Si ninguna de las opciones funciona entonces *px^2+qx+r* es irreducible. Tratar las diversas posibilidades recibe el nombre de método de ensayo y error. Este método también es aplicable al trinomio de la forma *$px^2+qxy+r$"* (2011: 36).

Ejemplo de factorización de un trinomio por ensayo y error, tomado de Swokowski: "factorizar *$6x^2 - 7x - 3$*. Si se escribe *$6x^2-7x - 3=(ax+b)\ (cx+d)$* las siguientes relaciones deben ser verdaderas: *ac = 6, bd = -3 y ad + bc =-7* y suponiendo que *a y c* representan números positivos, entonces los posibles valores se dan en la siguiente tabla" (2011:36).

a	1 6 2 3
c	6 1 3 2

Por tanto, *$6x^2 - 7x - 3$* es factorizable, entonces es verdadero uno de los siguientes:

$6x^2 - 7x - 3 = (x + b)(6x + d)$

$6x^2 - 7x - 3 = (6x + b)(x + d)$

$6x^2 - 7x - 3 = (2x + b)(3x + d)$

$6x^2 - 7x - 3 = (3x + b)(2x + d)$

Al considerar todos los valores posibles para *b y d* como *bd = -3,* éstos son:

b	1	-1	3	-3
d	-3	3	-1	1

Al ensayar varios valores, se llega a concluir que $b = -3$ *y* $d = 1$ es decir:

$6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$. Para comprobar, se multiplican los factores *(2x-3) y (3x+1)* y el producto es $6x^2 - 7x - 3$. (2011: 36)

Stewart resume los procedimientos de factorización en tres reglas: Diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, y suma o diferencia de cubos; pero además explica la factorización por factor común y factor común por agrupación. Estos dos últimos los ilustra mediante ejemplos, como los siguientes (2012: 27):

a. Factorizar el polinomio $3x^2 - 6x$

Este polinomio está compuesto de dos términos que tienen como máximo factor común a $3x$ de modo que $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ (2012;28)

b. Factorizar el polinomio $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

El máximo factor común de estos tres términos es $2xy^2$ por lo que $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$ (2012;28)

c. Factorizar $(2x+4)(x-3) - 5(x-3)$

Este polinomio está formado por la diferencia de dos expresiones, que tienen como factor común $(x - 3)$ por lo que por propiedad distributiva se tiene

$(2x+4)(x-3) - 5(x-3) = \left[(2x+4) - 5\right](x-3)$ y simplificado queda $(2x - 1)(x - 3)$

La factorización de un polinomio por agrupación Stewart la ilustra con los siguientes ejemplos (2012;28):

a. Factorizar el polinomio $x^3 + x^2 + 4x + 4$

Agrupando los términos de este polinomio se tiene $x^3 + x^2 + 4x + 4= (x^3 + x^2) + (4x + 4)$

Cada grupo tiene factor común: $x^3 + x^2 + 4x + 4= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$

$(x + 1)$ es factor común en cada expresión que se suman, por lo tanto:

$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^2 + 4) (x + 1)$

b. Factorizar el polinomio $x^3 – 2x^2 – 3x + 6$

Agrupando términos, $x^3 – 2x^2 – 3x + 6 = (x^3 – 2x^2) – (3x – 6)$

Sacando factor común de cada grupo $x^3 – 2x^2 – 3x + 6 = x^2(x – 2) -3(x – 2)$

(x – 2) es factor común por lo que $x^3 – 2x^2 – 3x + 6 = (x^2 – 3) (x – 2)$

Para la factorización de trinomios, inicialmente Stewart expone el trinomio de la forma x^2+bx+c y se hace la observación de que $(x + r) (x + s) = x^2 + (r + s)x + rs,$ por lo que se necesita escoger números r y s tales que $r + s =b$ y $rs =c.$ (2012: 28)

Y presenta como ejemplo, factorizar por ensayo y error el trinomio $x^2 + 7x + 12.$ Por ensayo y error se hallan dos números cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7; estos números son 4 y 3. Entonces la factorización es: $x^2 + 7x + 12 = (x + 4) (x + 3)$. (2012: 28)

Para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c con $a \mid 1,$ buscan factores de la forma $px + r$ y $qx + s$: $ax^2+bx+c = (px + r) (qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$. Por lo tanto se trata de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c, ps + qr = b$. si tales múmeros son enteros, se tiene un número limitado de posibilidades de consegur p, q, r y s (2012:28-29)

Ejemplo: Factorizar $6x^2 + 7x - 5$

Se puede expresar el número 6 como producto de 2 * 3 ó 6 * 1 y el -5 como -5(1) ó 5(-1) y al tratar estas posibilidades se llega a factorizar $6x^2 + 7x - 5= (3x + 5) (2x – 1)$. (2012: 29).

6.6 MATERIAL MANIPULABLE

Mejía recomienda el uso de “materiales manipulables desde un modelo geométrico que relaciona el área de rectángulos con la expresión factorizada de una expresión algebraica, de especial interés en las expresiones polinómicas cuadráticas. Los educandos al utilizar estos materiales construyen rectángulos y al hallar su área obtienen su expresión factorizada, y los polinomios que representan la longitud de la base y la altura del rectángulo son los factores del polinomio que representa el área” (2004;17).

6.7 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Los aspectos señalados en párrafos anteriores, nos indican que el éxito de la educación radica en la realización de aprendizajes significativos en los que se permite al alumno construir la realidad.

Vásquez señala al respecto, “que el conocimiento no es una reproducción de la realidad, sino una construcción ejecutada por el ser humano a partir de los esquemas que ya posee, es decir, de lo que ya antes había construído en función de su entorno”. Y agrega que, “considerando que el aprendizaje es un proceso constructivo interno, no basta con presentar al alumno la información para que éste la aprenda; es necesario que él mismo la construya por medio de su propia experiencia. A esto el profesor debe prestar toda su atención, puesto que va en contra de la concepción de que el educacdor debe ser quien se encargue de transmitir el conocimiento”. (2006: 258).

CAPÍTULO VII

MARCO METODOLÓGICO

7.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Se realizó una evaluación diagnóstica, para conocer qué aspectos necesitaban reforzarse en los temas que los estudiantes deben dominar previo al estudio de la factorización: Término algebraico, sus partes, su clasificación, su interpretación; polinomios algebraicos, clasificación, grado de un polinomio, ordenación de polinomios, operaciones con polinomios, propiedades de las operaciones; áreas de rectángulos, volumen del cubo y volumen de otros sólidos de caras rectangulares.

La evaluación diagnóstica permitió conocer que los estudiantes tenían debilidades en los temas relacionados con reducción de términos semejantes, multiplicación de polinomios, interpretación y cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos. Por tal razón se llevó a cabo una retroalimentación en dichos temas, a lo largo de dos semanas.

Tanto al inicio, como durante el desarrollo de este proceso de aprendizaje, se motivó a los estudiantes a participar activamente para lograr un sólido aprendizaje.

Al abordar el tema específico, se definió qué es la factorización, ejemplificándola ampliamanete y realizando ejercicios en los que los estudiantes demostraron haber comprendido qué es la factorización y su importancia.

7.2 METODOLOGÍA

En este trabajo se desarrolló un método cuasi experimental, ya que se trabajó con un grupo de estudiantes al que se monitoreó en el desarrollo del trabajo y al final el resultado obtenido con ellos se comparó con el de otro grupo tomado como testigo.

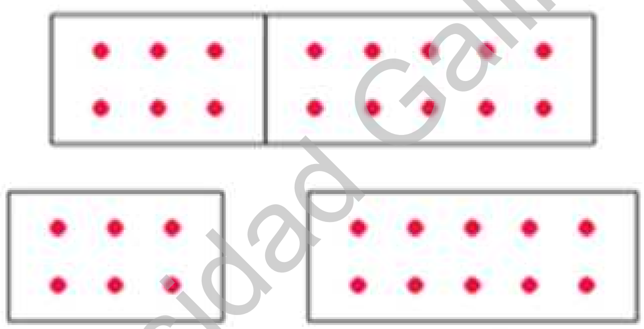
7.3 PROPIEDAD DISTRIBUTIVA Y FACTOR COMÚN

Se procedió inicialmente a explicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, para poder identificar el factor común de un polinomio, con lo cual se dio paso a una de las reglas fundamentales de la factorización: El factor común, y el factor común por agrupación de términos.

7.3.1 Propiedad distributiva

Se explicó que la propidad distributiva se aplica siempre que se multiplica un número por una suma, como se ilustra en la siguiente gráfica:

2(3 + 5)

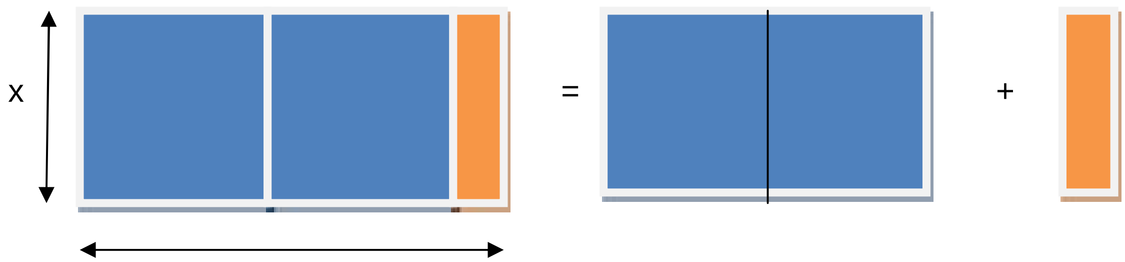


2 X 3 + 2 X 5

Fuente: Precálculo. Stewart, Earl, et al.

Los estudiantes lograron identificar y explicar que en la parte superior de esta gráfica se ilustra la suma de dos filas de puntos, y cada fila está formada por la suma de 3 puntos con 5 puntos, entonces se escribe como *2(3 + 5)* y así mismo, identificaron que en la parte inferior se ilustra la misma cantidad de puntos, pero agrupando 2 filas de 3 puntos y sumada con 2 filas de 5 puntos, lo que se escribe como *(2 X 3) + (2 X 5)* y al expresar ambas formas la misma cantidad de puntos, se estableció que *2(3 + 5) = (2 X 3) + (2 X 5).* Posteriormente los estudiantes escribieron otros ejemplos y los resolvieron, intercambiándose los mismos.

Ampliando el ejemplo anterior y aplicando la propiedad con expresiones algebraicas, se propuso la siguiente expresión: *x(2x + y)*, la cual se ilustró gráficamente con material manipulable así:



$2x + y \quad = \quad 2x^2 \quad + \quad xy$

$x(2x + y) = (x)(2x) + (x)(y) = 2x^2 + xy$

Con base a estas demostraciones, se trabajó algebraicamente el siguiente ejemplo:

$2x(3x + 5) = (2x)(3x) + (2x)(5) = 6x^2 + 10x$ mediante el análisis de estos y otros ejercicios se generalizó: $ax(bx + c) = abx^2 + acx$

Se solicitó que los estudiantes explicaran en forma individual, como interactúan la adición y la multiplicación, enriqueciéndola con ejemplos de la vida práctica, como es el caso de las personas que, dedicadas a las actividades de comercio en pequeña escala, hacen cuentas de multiplicación aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

7.3.2 Factor común

Habiendo ejercitado suficientemente la aplicación de la propiedad distributiva, mediante un interrogatorio dirigido a los estudiantes, ellos concluyeron que al multiplicar un término algebraico por un polinomio, en el polinomio producto, todos los términos tienen como factor común, el término por el que se multiplicó el primer polinomio. Así se pasó a descomponer un polinomio en factores por el factor común monomio.

$ab + ac = a(b) + a(c) = a(b + c)$

$3x^2y^2 – 6x^3y + 12xy = 3xy(xy) – 3xy(2x^2) + 3xy(4) = 3xy(xy – 2x^2 + 4)$

$15b^2c^2d^2 - 10b^2c^2 + 5c^2 = 5c^2(3b^2d^2) – 5c^2(2b^2) + 5c^2(1) = 5c^2(2b^2d^2 – 2b^2 + 1)$

Con el desarrollo de estos ejemplos, se pudo demostrar que para descomponer un polinoimio en factores, cuando dicho polimomio tiene factor común, se procede a hallar el factor común, formado por el máximo común divisor de los coeficientes numéricos de los términos del polinomio y las literales comunes a todos los términos, con su menor exponente.

Como ejemplo hallamos los factores del polinomio $8x^5 – 12x^3 +16x^2$

El factor común se forma por el máximo común divisor de 8, 12 y 16, que es 4, la literal común (la que se repite en todos los términos) es *x* y el menor exponente de dicha literal es 2, luego entonces el factor común es $4x^2$, y dividiendo el polinomio entre el factor común se obitene como cociente $2x^3 + 3x +4$; entonces los factores de $8x^5 – 12x^3 +16x^2$ son $4x^2(2x^3 + 3x +4)$

7.3.3 <u>Factor común polinomio</u>

Algunos polinomios pueden ser escritos como la suma de productos indicados, en los cuales se repite uno de los factores, ejemplo: $x(a + 1) + 3(a + 1)$, comparando este polinomio con los ejemplos anteriores, fue fácil identificar al binomio $(a + 1)$ como factor común, por lo que dividiendo cada parte del polinomio entre el factor común se tiene: $\frac{x(a \Gamma 1)}{a \Gamma 1} \mathrm{X} x$;

$\frac{3(a \Gamma 1)}{a \Gamma 1} \mathrm{X} 3$, luego entonces: $x(a + 1) + 3(a + 1)=(a + 1)(x + 3)$

Con esto se logró explicar que algunos polinomios, al no tener factor común monomio, se pueden agrupar sus términos, tratando que los términos agrupados tengan factor común, así por ejemplo, el polinomio $3m – 2n -2nx + 3mx$ no tiene factor común, pero se pueden agrupar sus términos así: $(3m + 3mx) – (2n + 2nx)$. Cada grupo tiene factor común, por lo que el polinomio es equivalente a $3m(1 + x) – 2n(1 + x) = (1 + x)(3m – 2n)$ y estos son sus factores. Otros ejemplos trabajados en clase fueron:

$4x^2+5x-4x-5 = (4x^2 – 4x) + (5x – 5) = 4x (x – 1) + 5(x – 1) = (x – 1) (4x + 5)$

$2x^2-3x^3+3x-2 = (2x^2 – 2) – (3x^3 – 3x) = 2(x^2 – 1) – 3x (x^2 – 1) = (x^2 – 1) (2 – 3x)$

$x^3+8x^2 –x-8 = (x^3 – x) + (8x^2 – 8) = x (x^2 – 1) + 8(x^2 – 1) = (x^2 – 1) (x + 8)$

$x^3+2x^2-3x-6 = (x^3 + 2x^2) – (3x + 6) = x^2(x + 2) – 3(x + 2) = (x + 2) (x^2 – 3)$

$3x^3+x^2-12x-4 = (3x^3 + x^2) – (12x + 4) = x^2(3x + 1) – 4(3x + 1) = (3x + 1) (x^2 – 4)$

7.4 PRODUCTOS NOTABLES

Seguidamente se explicó que ciertos productos se ajustan a reglas fijas, cuya aplicación permite escribir dichos productos, sin tener que realizar la multiplicación. A estos productos se les conoce como *productos notables*. Se incluyeron ejemplos y ejercicios de multiplicación de binomios de las formas $(x + y)(x + y)$ o sea $(x + y)^2$, efectuando el procedimiento de la multiplicación de dos polinomios, así también $(x - y)(x - y)$ o sea $(x - y)^2$; $(x + y)(x + y)(x + y)$ o sea $(x + y)^3$; $(x - y)(x - y)(x - y)$ o sea $(x - y)^3$; $(x + y)(x - y)$ o sea el producto de la suma por la diferencia de dos términos.

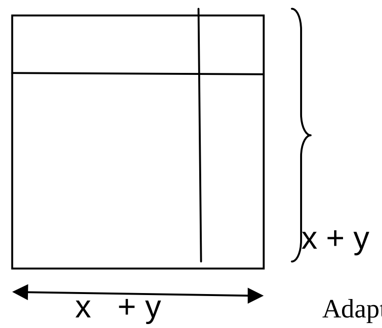
Se indicó a los estudiantes que estos productos pueden escribirse por simple observación, es decir, sin tener que multiplicar, pero estos procesos se conocerían en su momento, a medida que se desarrollarían uno por uno y su respectiva aplicación en la factorización, ya que son procesos inversos: en los productos notables, se enuncian los factores y hay qué identificar el producto, mientras que en la factorización, a partir de un producto, hay qué establecer sus factores.

Esto último fundamenta la propuesta de trabajar simultáneamente un caso de producto notable y su correspondiente caso de factorización.

Para la correcta interpretación de los productos notables y su aplicación, se trabajó con figuras recortadas en cartulina de colores, demostrando cuadrados de lado x, y cuya área se representó por x^2, rectángulos de longitud x y de ancho y y por lo tanto su área es el producto de su longitud por su ancho xy y también cuadrados de lado y, cuya área es y^2. Estos materiales se prepararon con las medidas adecuadas para su utilización en el pizarrón: x = 30 cm; y = 10 cm. Cada estudiante elaboró su material, con medidas adecuadas para su utilización en su tablero de trabajo: x = 12 centímetros; y = 5 centrímetros.

7.4.1 Cuadrado de un binomio. Trinomio cuadrado perfecto

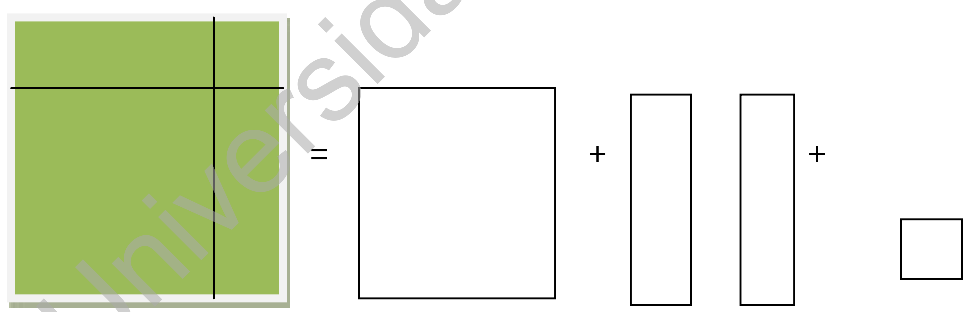
La primera regla de producto notable estudiada fue el cuadrado de un binomio: $(x + y)^2$ se interpretó como el producto de $(x + y)$ $(x + y)$, lo cual geométricamente fue representado como un cuadrado que mide en cada lado $(x+ y)$ unidades.



Adaptado del álgebra de Baldor página 99.

El área de esta figura se obtiene algebraicamente por el producto de su base por su altura: $(x + y)$ $(x + y)$ ó $(x + y)^2$.

Se explicó que el área de esta figura también se determina por la sumatoria de las áreas de las cuatro regiones que la forman, las cuales son ya conocidas, así:



$(x + y)^2 \quad = \quad x^2 \quad + \; 2xy \quad + \quad y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ Fuente: Autor

En base a esta primera demostración, se pidió a los estudiantes que resolvieran en forma geométrica otros productos, tales como $(x + 3y)^2$, $(x + 2)^2$. Para este último cuadrado se estableció que las figuras rectangulares tendrían x de longitud y *1* (unidad) de ancho, con lo cual, su área es $(x)\ (1) = x$, y también el cuadrado pequeño, entonces mide *1* (unidad) por lado y su área es de *1* unidad cuadrada.

Con estas prácticas el estudiante pudo deducir que el resultado de elevar al cuadrado un binomio es un trinomio cuadrado perfecto; trinomio porque es un polinomio de tres términos; cuadrado perfecto, porque representa el área de un cuadrado. Y del resultado obtenido, se concluyó que el cuadrado de la suma de dos términos equivale al cuadrado del primer término, más el doble producto de los términos, más el cuadrado del segundo término.

Para la aplicación de esta regla deducida, se trabajaron los productos

$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

$(5m + 12)^2 = (5m)^2 + 2(5m)(12) + (12)^2 = 25m^2 + 120m + 144$

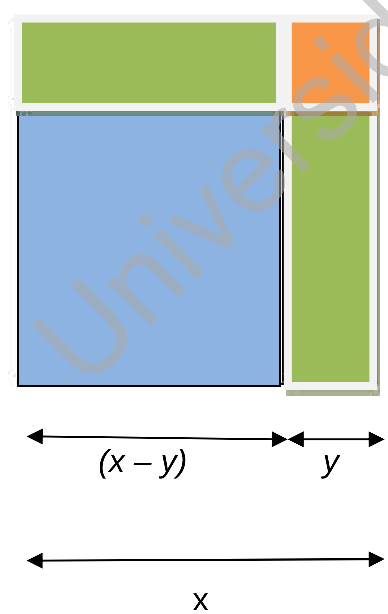
$(7y + 9)^3 = (7y)^2 + 2(7y)(9) + (9)^2 = 49y^2 + 126y + 81$

$(8x + 3)^2 = (8x)^2 + 2(8x)(3) + (3)^2 = 64x^2 + 48x + 9$

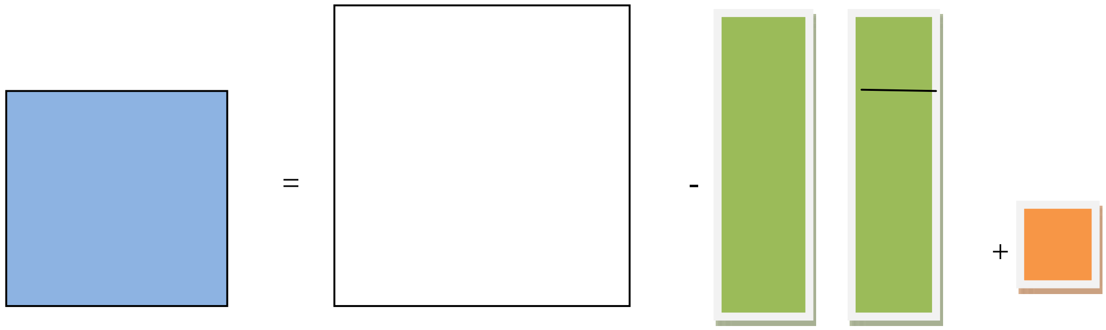
$(4x + 11)^2 = (4x)^2 + 2(4x)(11) + (11)^2 = 16x^2 + 88x + 121$

$(3x + 10)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(10) + (10)^2 = 9x^2 + 60x + 100$

Se trabajó el cuadrado de la diferencia de dos términos $(x – y)^2$, así:



Aquí también se estableció que el área del cuadrado cuyos lados miden $(x – y)$ se obtendría algebraicamente por el producto $(x – y)^2$, pero en forma geométrica nos permitió llegar a la siguiente demostración:



$(x - y)^2 \quad = \quad x^2 \quad - \quad 2xy \quad + \quad y^2$

Fuente: Autor

Se explicó que para llegar al área de la parte pintada de celeste $(x - y)^2$, se partió del área total de la figura x^2 y se le disminuyó el área xy de las dos figuras rectangulares, y al disminuir el segundo rectángulo xy notamos que se estaba disminuyendo una segunda vez el área del cuadrado pequeño y^2 por lo que se volvió a sumar para completar el área indicada, o sea:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Con otros ejemplos similares los estudiantes llegaron a deducir que el cuadrado de la diferencia de dos términos equivale a: el cuadrado del primer término, menos el doble producto de los términos, más el cuadrado del segundo término.

Otros ejemplos trabajados:

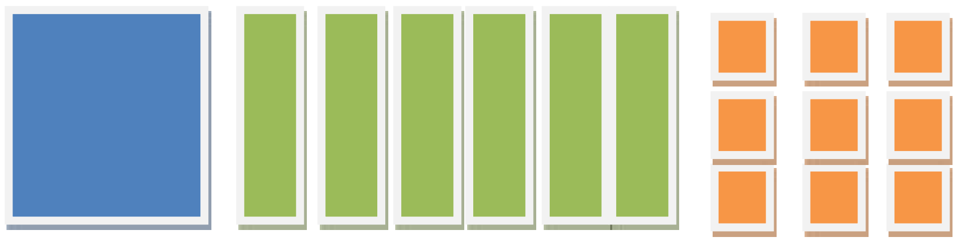
$$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2(3x)\ (2) + (2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$(10n - 25)^2 = (10n)^2 - 2(10n)\ (25) + (25)^2 = 100n^2 - 500n + 625$$

$$(15y - 9)^2 = (15y)^2 - 2(15y)\ (9) + (9)^2 = 225y^2 - 270y + 81$$

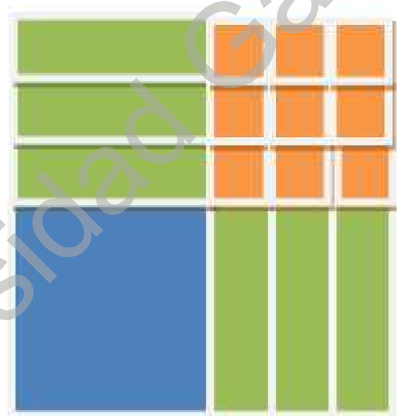
Del conocimiento del cuadrado de la suma o diferencia de dos términos, que da como producto un trinomio cuadrado perfecto, se pasó a explicar que, a partir de un trinomio cuadrado perfecto, se puede llegar a conocer el binomio que elevado al cuadrado es equivalente a dicho trinomio, es decir, se puede llegar a conocer sus factores; este es el caso de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Para el efecto, se pidió a los estudiantes que formaran con las figuras recortadas en cartulina la representación del polinomio $x^2 + 6x + 9$, así:



x^2 $\quad$ $6x$ $\quad$ 9

Se pidió que con estas partes se formara un cuadrado, de tal manera que no sobrara ni hiciera falta ninguna parte



El cuadrado así formado, mide en cada lado $x + 3$

De esta demostración se concluyó que el trinomio $x^2 + 6x + 9$ es el resultado de elevar al cuadro el binomio $x + 3$, así: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Otro ejemplo trabajado en forma gráfica fue el trinomio $x^2 + 8x + 16$. Se representó este trinomio gráficamente con las partes de cartulina y luego se formó con ellas un cuadrado, el cual midió en cada lado $(x + 4)$, con lo que se pudo concluir que los factores del trinomio $x^2 + 8x + 16$ son $(x + 4)\ (x + 4)$, o sea $(x + 4)^2$.

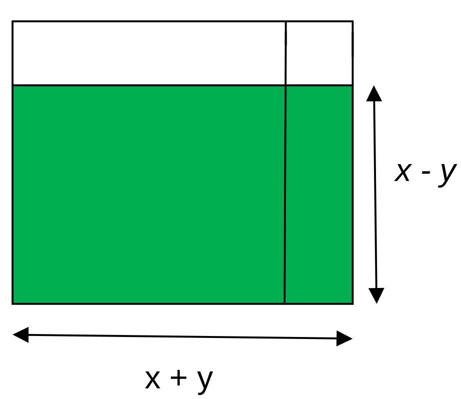
De los ejemplos trabajados se reafirmó el procedimiento práctico de factorizar un trinomio cuadrado perfecto, el que se resume así:

a. Dado el trinomio, ver que esté ordenado con relación a su variable en forma descendente.
b. Los términos del trinomio ya ordenado deben ser positivos, o el segundo puede ser negativo.
c. El primer término y el tercer término deben tener raíz cuadrada exacta.
d. El segundo término del trinomio cuadrado perfecto debe ser equivalente al doble producto de las raíces cuadradas del primer término y del tercer término.

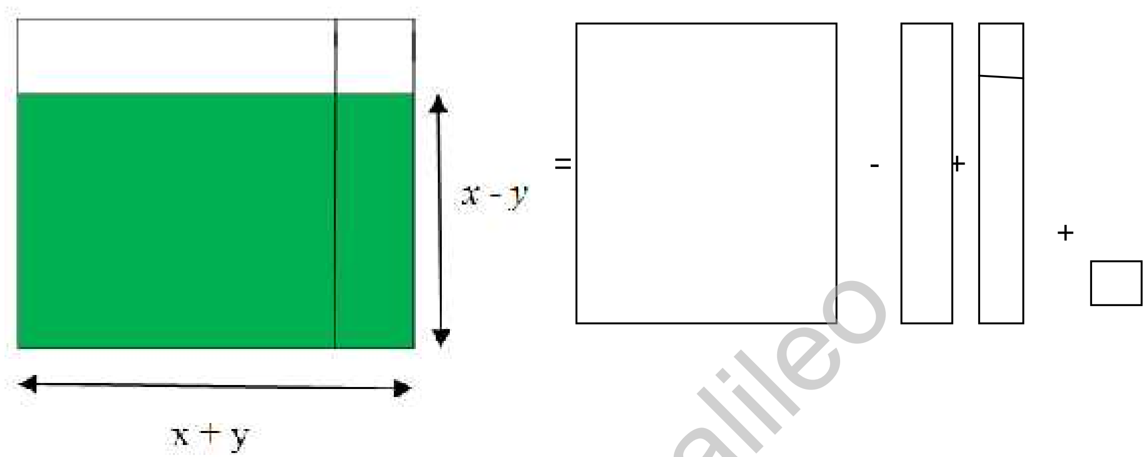
Si se cumplen estas condiciones, entonces los factores del trinomio cuadrado perfecto se obtienen elevando al cuadrado la suma o la diferencia, dependiendo del signo del segundo término, de las raíces cuadradas del primer término y del tercer término.

7.4.2 <u>Producto de la suma por la diferencia de dos términos. Diferencia de dos cuadrados perfectos</u>.

Otro caso de producto notable, que fue practicado en las demostraciones de productos notables es el producto de la suma por la diferencia de dos términos, cuyo producto resultante es la diferencia de los cuadrados de los términos y se demostró gráficamente con material manipulativo, así: sobre el cuadrado original de área x^2, en la parte superior, se colocó en forma inversa para indicar que se resta, el área del rectángulo xy, y a la derecha del mismo cuadrado se agregó la figura rectangular de área xy, disminuida en y^2 así se formó una figura rectangular no cuadrada, cuya base mide $x + y$, y su altura mide $x – y$. dicho rectángulo en la siguiente figura se representa por la parte sombreada.



El área sombreada en esta figura representa un rectángulo cuya área es el producto de *(x + y) (x - y),* y gráficamente esta área se puede expresar así:



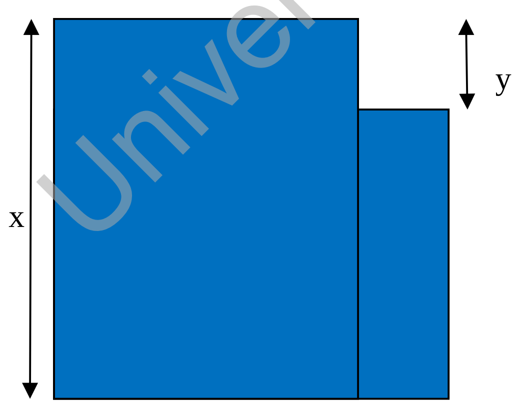
$(x + y)\ (x - y) \quad = \quad x^2 \quad - \ xy \ + \ xy \ - y^2$

Que en forma simplificada queda $x^2 - y^2$

Fuente: Autor

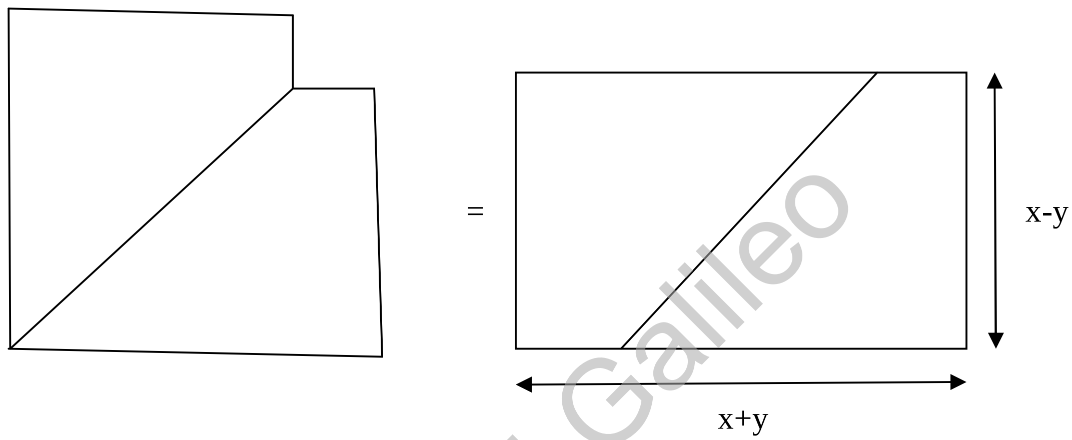
En el proceso inverso (factorización), a partir de la diferencia de dos cuadrados, pudo obtenerse sus factores.

La diferencia de dos términos cuadrados se ilustró gráficamente así:



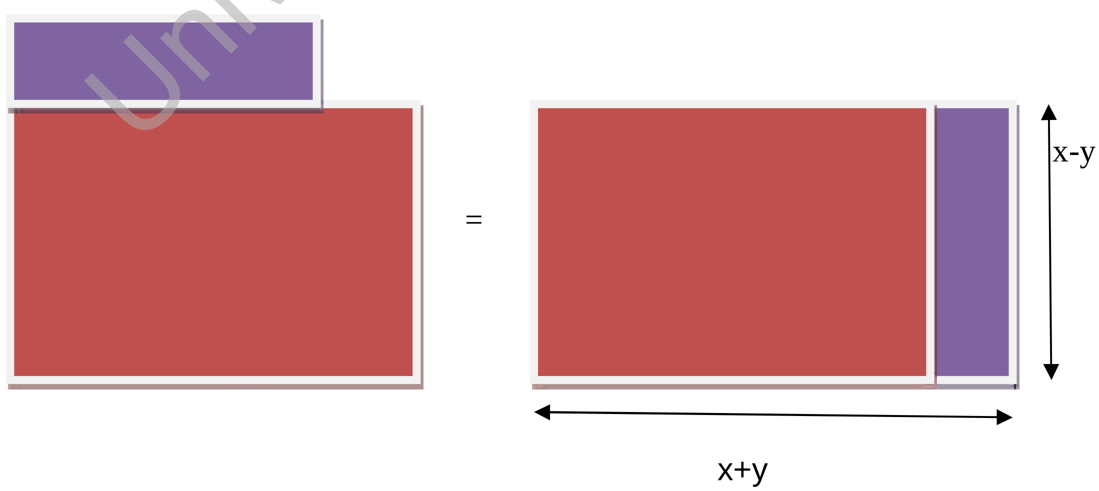
Se observa que esta gráfica, originalmente era un cuadrado con lados de longitud *x*, y en la esquina superior derecha se le ha extraído un cuadrado de menor tamaño y cuyos lados miden "*y*" unidades, por lo que ahora en la gráfica la parte sombreada representa un área de $x^2 - y^2$.

Esta figura se transformó mediante un corte desde la esquina inferior izquierda de x^2 hasta la esquina inferior izquierda de y^2, y se reacomodaron, con la intención de que, sin perder nada de su área, se convirtiera en una figura rectangular:



El rectángulo así formado mide en su base *x+y* y su altura es *x-y*; y siendo el área de un rectángulo el producto de su base por su altura se concluyó que $x^2-y^2 = (x+y)\ (x-y)$ es decir, la diferencia de cuadrados equivale al producto de la suma por la diferencia de sus raíces cuadradas.

Se ilustró otra manera de formar un rectángulo con la figura original, o sea x^2-y^2, haciendo el recorte de la siguiente manera:



El recorte que se le hace horizontalmente en la parte superior, tiene una longitud igual al ancho o altura de la figura rectangular restante, por lo que perfectamente dicho recorte se pudo acomodar a un costado, formando siempre un rectángulo, cuya base es *x+y* y su altura *x – y,* y así, nuevamente se demostró que $x^2 – y^2 = (x + y)(x – y)$.

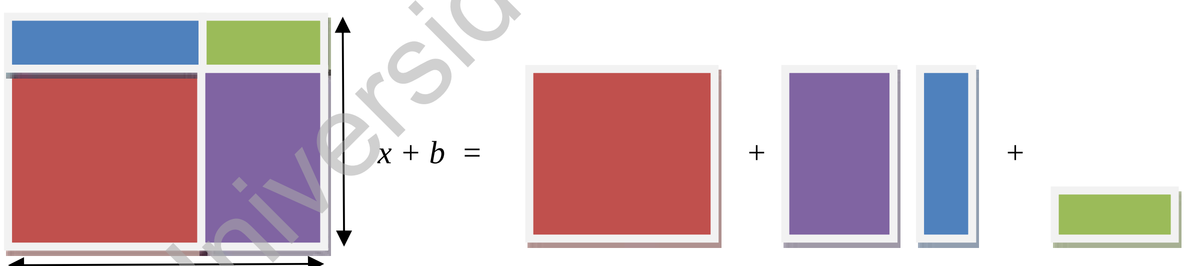
Se presentaron los siguientes ejemplos, ya no en forma gráfica o geométrica, sino aplicando la regla deducida:

$x^2 - 81 = (x – 9)(x + 9)$

$144n^2 – 16p^2 = (12n – 4p)(12n + 4p)$

7.4.3 <u>Producto de dos binomios de las formas (x + a) (x + b). Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$</u>.

En lo concerniente al producto de dos binomios cuyos primeros términos son iguales y los segundos distintos, que también se identifica como el producto de dos binomios de las formas $(x + a)(x + b)$, se obtuvo un trinomio formado por $x^2 + (a + b)x + ab$ y se demostró gráficamente así:



$x + a$ $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$

Que simplificada queda: $x^2 + (a + b)x + ab$

Fuente: Autor

Este producto se definió como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

Ejemplo: Hallar el producto de $(x + 5)(x – 3)$

El producto es un trinomio formado por x^2 Γ•5 Γ ƒZ3Áx Γ5ƒZ3Á

En forma simplificada queda $x^2 + 2x – 15$

Otros ejemplos:

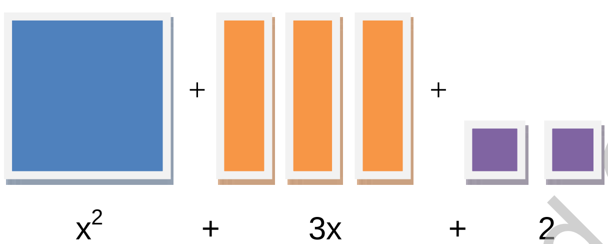
$$(x-8)(x+3) = x^2 + [(-8)+3]x + (-8)(3) = x^2 - 5x - 24$$

$$(m-4)(m-11) = m^2 + [(-4)+(-11)]m + (-4)(-11) = m^2 - 15m + 44$$

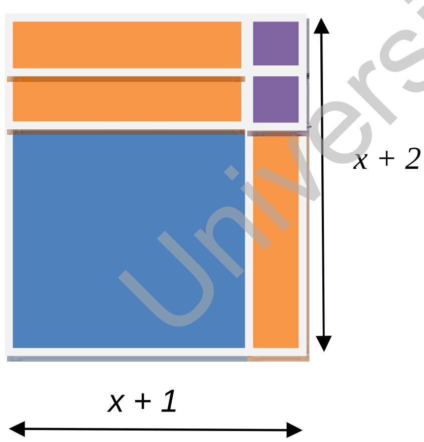
En su forma inversa, es decir, partiendo del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se llegó a establecer que sus factores son dos binomios de las formas *(x + a) (x + b)*.

Por ejemplo, hallar los factores de $x^2 + 3x + 2$

Este polinomio se graficó así:



Al formar un rectángulo con estas figuras se obtuvo:



Con lo cual se demuestra geométricamente que $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

Fuente: Autor

Al descomponer el polinomio por cálculo algebraico, fue necesario recordar que un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se obtiene como producto de dos binomios de las formas *(x + a) (x + b)*, por lo que $x^2 + 3x + 2$ equivale al producto de dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2 y los segundos términos serán respectivamente dos términos numéricos cuya suma sea 3 y su producto sea 2; estos números son 2 y 1 y así se obtiene:

$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$.

Otro ejemplo: Hallar los factores de $x^2 + 4x – 21$. Este trinomio es el producto de dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2: $(x + \quad)(x - \quad)$. El signo en el primer binomio es el sigo del segundo término del trinomio que se va a factorizar, y el signo del segundo binomio factor es el signo del producto del segundo por el tercer término del trinomio. Como los dos signos son distintos, los binomios se completan con dos términos numéricos cuya diferencia sea 4 y su producto sea 21. Los números que cumplen con estas condiciones son 7 y 3; el de mayor valor absoluto se escribe en el primer binomio, así: $(x + 7)(x – 3)$

7.4.4 <u>Producto de dos binomios de las formas (ax + b) (cx + d). Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$</u>.

Se practicó el producto de dos binomios cuyos términos son diferentes, pero los primeros son semejantes entre sí. A este producto también se le identifica como el producto de dos binomios de las formas $(ax + b)(cx + d)$.

En este caso se multiplicaron los binomios, obteniendo como producto un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. Ejemplos:

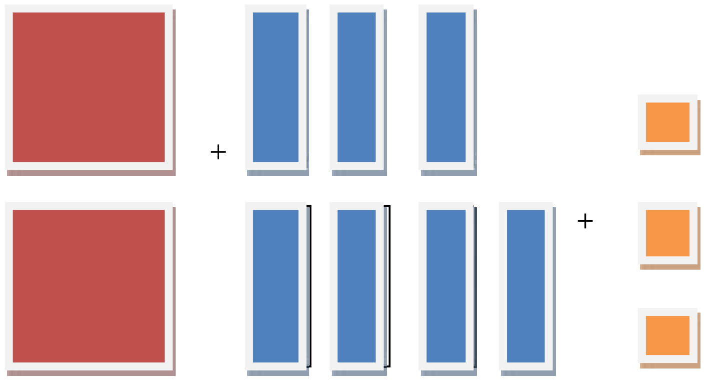
$(3x + 5)(2x - 7) = (3x)(2x) + 3x(-7) + 5(2x) + 5(-7) = 6x^2 – 21x + 10x - 35$, que simplificado queda $6x^2 + 11x – 35$

$(12n – 15)(7n – 9) = (12n)(7n) + (12n)(-9) + (-15)(7n) + (-15)(-9) =$

$84n^2 - 108n – 105n + 135$ que simplificado queda $84n^2 – 213n + 135$

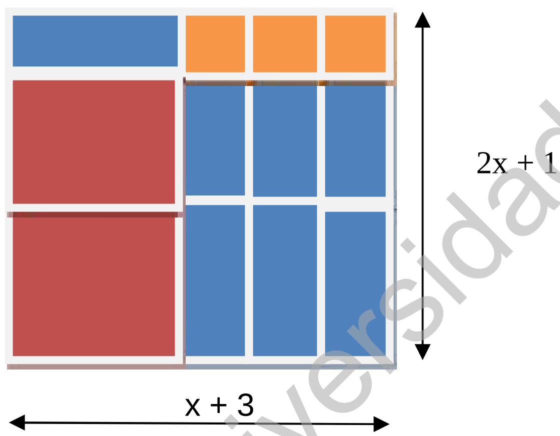
En estos dos ejemplos se obtuvo como producto un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. es un trinomio de grado 2 con coeficiente de x^2 diferente de 1.

Por ejemplo, el trinomio $2x^2 + 7x + 3$. Este trinomio al tener el número real “a” diferente de 1, se entiende que geométricamente hay 2 áreas cuadradas de lado x; luego, se tienen 7 regiones rectangulares de base x y altura 1, y finalmente tres regiones cuadradas que miden 1 unidad en cada lado. Todo esto nos permitió graficar el mencionado trinomio, como se ilustra a continuación:



$2x^2$ + $7x$ + 3

Con estas partes se formó un rectángulo, así



Fuente: Autor

Se obtuvo un rectángulo cuya base mide $x + 3$ y su altura mide $2x + 1$; por lo tanto, los factores del trinomio $2x^2 + 7x + 3$ son $(x + 3)(2x + 1)$.

De la observación de estas gráficas se dedujo un procedimiento práctico para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Por ejemplo, hallar los factores del trinomio $6x^2 + 5x - 21$
Se realizan transformaciones del trinomio $6x^2 + 5x – 21$

$(6x)^2 + 5(6x) – 126$ se ha multiplicado el trinomio por 6, para que el primer término sea cuadrado

$y^2 + 5y – 126$ se ha sustituido $6x$ por y, ahora el trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$.

$(y + 14)(y – 9)$ factores de $y^2 + 5y – 126$

$\dfrac{(6x + 14)\ (6x - 9)}{6}$ se restituyó el término 6x y se dividió por 6 porque inicialmente el trinomio fue multiplicado por 6.

$\dfrac{(6x + 14)\ (6x - 9)}{2 \times 3}$ como 6 no divide a ninguno de los binomios, se cambió por sus factores (2 X 3), y así 2 dividió a $(6x + 14)$ *y* 3 dividió a $(6x - 9)$

$(3x + 7)\ (2x - 3)$ factores de $6x^2 + 5x - 21$

Este procedimiento se resumió en lo siguiente:

$6x^2 + 5x - 21$ equivale al producto de dos binomios cuyo primer término es 6x: $(6x + \quad)\ (6x - \quad)$. 6x es la raíz cuadrada de $36x^2$ (primer término del trinomio multiplicado por 6, que es el coeficiente de $6x^2$).

$(6x + 14)\ (6x - 9)$ 14 y 9 son dos números cuya diferencia es 5 y su producto es 126. (126 es el producto 21 por 6).

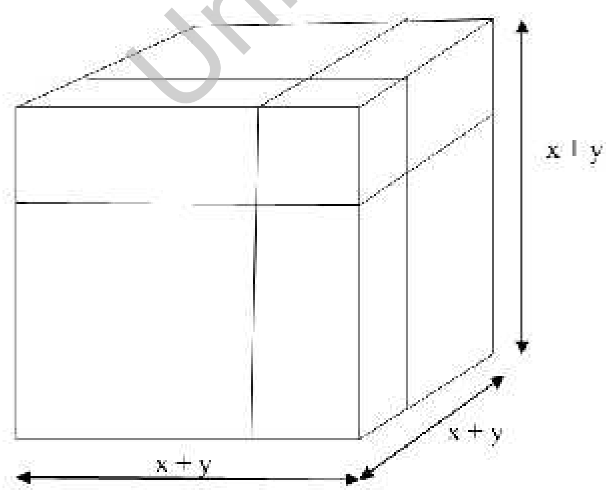
$\dfrac{(6x + 14)\ (6x - 9)}{(2)\ (3)}$ se dividió entre 6, porque antes fue multiplicado por 6.

$(3x + 7)\ (2x - 3)$ factores de $6x^2 + 5x - 21$

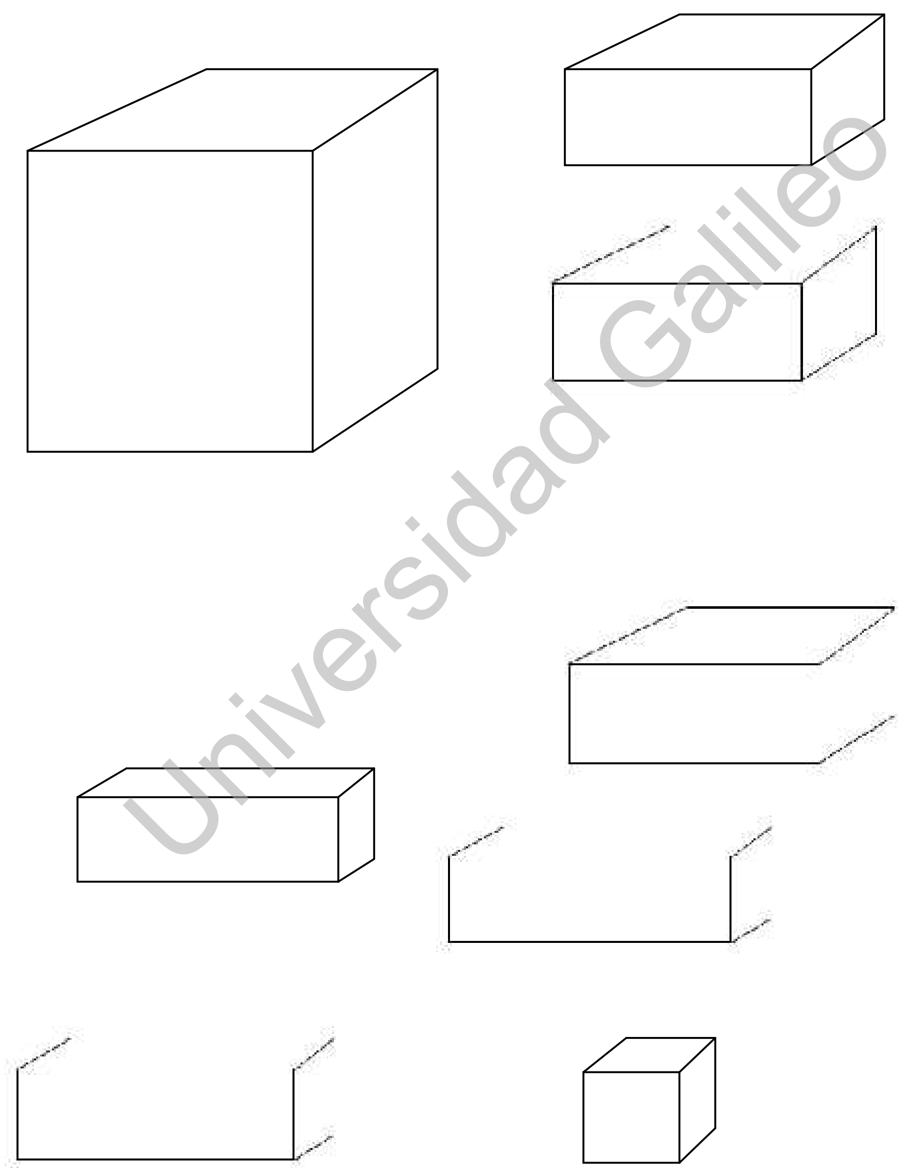
Se trabajaron en clase otros ejemplos y los estudiantes practicaron ejercicios en clase y tareas que realizaron en casa.

7.4.5 <u>Cubo de un binomio. Cubo perfecto de binomios</u>.

El cubo de un binomio. $(x + y)^3$ fue ilustrado gráficamente así:

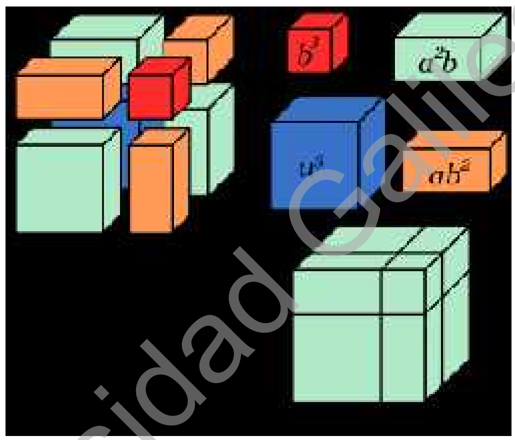


Este cubo mide en cada una de sus aristas x + y, por lo que su volumen representa el cubo de un binomio $(x + y)^3$. Está formado por ocho sólidos que se ilustran a continuación:



El cubo mayor mide en cada arista, *"x"* por lo que su volumen es x^3. A la derecha de este cubo se ilustran tres sólidos (paralelepípedos) de base cuadrada (x^2) y altura *"y"*, por lo que su volumen es x^2y y por ser tres, se describen como $3x^2y$. Los siguiente tres paralelepípedos miden de largo *"x"*, de ancho *"y"* y de altura *"y"*. Por lo que el volumen de cada uno es xy^2 y el volumen total de los tres es $3xy^2$. Finalmente hay un cubo pequeño cuyas aristas miden *"y"* y su volumen es entonces y^3. Por lo tanto, se dedujo que: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Estos sólidos fueron construidos por los estudiantes y con ellos practicaron armando el cubo compuesto por los ocho sólidos. Para mayor comprensión los sólidos iguales fueron decorados del mismo color.



Fuente: Eusebio Molina Rodríguez. Tomado de www.youtube.com

Así se dedujo que el cubo de la suma de dos términos equivale al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(x + y)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(y) + 3(x)(y)^2 + (y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Si se trata del cubo de la diferencia de dos términos, equivale al cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

$$(x - y)^3 = (x)^3 - 3(x)^2(y) + 3(x)(y)^2 - (y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Se complementó el estudio de este caso de factorización con ejemplos diversos y ejercicios que los estudiantes resolvieron, tanto en forma individual, como en pequeños grupos de trabajo.

7.5 COCIENTES NOTABLES Y FACTORIZACIÓN DE BINOMIOS

Para trabajar la factorización de la suma o diferencia de dos cubos y la suma o diferencia de dos potencias de igual grado, se actualizó el tema de cocientes notables, concernientes al cociente de un binomio formado por dos potencias de igual exponente entre la suma o diferencia de las bases de dichas potencias.

Para el efecto se realizaron diversas divisiones de binomios formados por dos potencias de igual exponente entre un binomio formado por las raíces de dichas potencias, por ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a - b \\ \hline
a + b & a^2 \quad - b^2 \\
 & \underline{-a^2 - ab} \\
 & \quad -ab - b^2 \\
 & \quad \underline{+ab + b^2} \\
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & a + b \\ \hline
a - b & a^2 \quad - b^2 \\
 & \underline{-a^2 + ab} \\
 & \quad + ab - b^2 \\
 & \quad \underline{- ab + b^2} \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a - b \\ \hline
a + b & a^2 \quad + b^2 \\
 & \underline{-a^2 - ab} \\
 & \quad -ab + b^2 \\
 & \quad \underline{+ab + b^2} \\
 & \qquad 2b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & a - b \\ \hline
a - b & a^2 \quad + b^2 \\
 & \underline{-a^2 + ab} \\
 & \quad + ab + b^2 \\
 & \quad \underline{- ab + b^2} \\
 & \qquad 2b^2
\end{array}
$$

De estos ejemplos se pudo observar que la diferencia de dos cuadrados perfectos es divisible entre la suma y la diferencia de sus raíces cuadradas. Así mismo se llegó a la conclusión de que la suma de dos cuadrados no es divisible ni entre la suma ni entre la diferencia de sus raíces cuadradas.

A continuación, se analizó la división de un binomio formado por dos potencias de exponente 3, entre un binomio formado por sus raíces cúbicas.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 + ab + b^2 \\ \hline
a - b & a^3 \qquad\qquad - b^3 \\
 & \underline{-a^3 + a^2b +} \\
 & \quad +a^2b \\
 & \quad \underline{-a^2b + ab^2} \\
 & \qquad\quad + ab^2 - b^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-ab^2 + b^3} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & a^2 - ab + b^2 \\ \hline
a + b & a^3 \qquad\qquad + b^3 \\
 & \underline{-a^3 - a^2b} \\
 & \quad -a^2b \\
 & \quad \underline{+a^2b + ab^2} \\
 & \qquad\quad +ab^2 + b^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-ab^2 - b^3} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 + ab + b^2 \\ \hline
a - b & a^3 \qquad\qquad + b^3 \\
 & \underline{-a^3 + a^2b +} \\
 & \quad +a^2b \\
 & \quad \underline{-a^2b + ab^2} \\
 & \qquad\quad + ab^2 + b^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-ab^2 + b^3} \\
 & \qquad\qquad\quad 2b^3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & a^2 - ab + b^2 \\ \hline
a + b & a^3 \qquad\qquad - b^3 \\
 & \underline{-a^3 - a^2b} \\
 & \quad -a^2b \\
 & \quad \underline{+a^2b + ab^2} \\
 & \qquad\quad +ab^2 - b^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-ab^2 - b^3} \\
 & \qquad\qquad\quad -2b^3
\end{array}
$$

De estos ejemplos se llegó a la conclusión de que la diferencia de cubos solo es divisible entre la diferencia de sus raíces cúbicas y la suma de cubos es divisible entre la suma de sus raíces cúbicas, mientras que la diferencia de cubos no es divisible entre la suma de sus raíces y de igual manera la suma de cubos no es divisible entre la diferencia de sus raíces.

7.5.1 Reglas de cocientes notables.

Los cocientes exactos de las divisiones anteriores nos permitieron formular las siguientes reglas de cocientes notables:

- **a.** El cociente de la diferencia de dos cuadrados, entre la diferencia de sus raíces cuadradas es: la suma de sus raíces.
- **b.** El cociente de la diferencia de dos cuadrados, entre la suma de sus raíces cuadradas es: la diferencia de sus raíces.
- **c.** El cociente de la diferencia de dos cubos, entre la diferencia de sus raíces cúbicas es: el cuadrado del primer término del divisor, más el producto de los dos términos del divisor, más el cuadrado del segundo término.

d. El cociente de la suma de dos cubos, entre la suma de sus raíces cúbicas es: el cuadrado del primer término del divisor, menos el producto de los dos términos del divisor, más el cuadrado del segundo término.

Se realizaron los ejercicios necesarios para que los estudiantes aplicaran sin confundirse, estas reglas básicas.

Y sabiendo que, en una división exacta, el dividendo equivale al producto del divisor por el cociente, las reglas anteriores se convierten en reglas de factorización, así:

7.5.2 Factores de la diferencia de cuadrados perfectos y de la suma o diferencia de dos cubos perfectos.

a. La diferencia de cuadrados equivale al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de dichos términos cuadrados.
b. La diferencia de dos cubos equivale al producto de la diferencia de sus raíces cúbicas por un trinomio formado por el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.
c. La suma de dos cubos equivale al producto de la suma de sus raíces cúbicas por un trinomio formado por el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

De igual manera, con una adecuada ejercitación se trató de que los estudiantes aplicaran sin equivocarse las reglas que determinan los factores en estos polinomios formados por la suma o la diferencia de potencias de tercer grado.

Ejemplos:
$4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$
$8n^3 - 64 = (2n - 4)(4n^2 + 8n + 16)$
$125y^3 + 27 = (5y + 3)(25y^2 - 15y + 9)$

7.5.3 Factorización de la suma o diferencia de dos potencias de igual grado.

Las mismas reglas enumeradas con anterioridad fueron aplicadas para la factorización de polinomios formados por la suma o diferencia de potencias de igual grado.

a. La diferencia de dos potencias de exponente par es divisible por la diferencia de sus raíces y por la suma de sus raíces.
b. La diferencia de dos potencias de exponente impar es divisible por la diferencia de sus raíces.
c. La suma de dos potencias de exponente impar es divisible por la suma de sus raíces.

En tales casos, se demostró que los cocientes se forman con el siguiente esquema:

a. El cociente de tales divisiones es un polinomio cuyo número de términos es equivalente al número dado como exponente de las potencias del dividendo.
b. El primer término del cociente se forma con el primer término del binomio divisor, elevado a un exponente una unidad menor al exponente de las potencias del dividendo.
c. El segundo término del cociente se forma con el producto del primer término del divisor con un exponente una unidad menor que en el primer término del cociente multiplicado por el segundo término del divisor.
d. En los siguientes términos, se continúa con el producto de los términos del divisor, teniendo en cuenta que el primer término va disminuyendo sucesivamente su exponente en una unidad, mientras que el segundo lo va aumentando en una unidad, hasta llegar al último término, el cual se forma de sólo el segundo término del divisor elevado a un exponente una unidad menor que los exponentes de las potencias que forman el dividendo.
e. Si el divisor está formado por la diferencia de raíces, todos los términos del cociente son positivos, y si está formado por la suma de raíces, en el cociente los términos se alternan positivo y negativo.

Para la factorización de estas sumas o diferencias de potencias de igual grado, prevalece el mismo criterio de que en toda división exacta el dividendo es equivalente al producto del divisor por el cociente.

Ejemplos:

$x^4 - 81 = (x - 3)\,[(x)^3 + (x)^2(3) + (x)(3)^2 + (3)^3] = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$

Los factores de esta diferencia de potencias de cuarto grado también pueden escribirse así:

$x^4 - 81 = (x + 3)[(x)^3 - (x)^2(3) + (x)(3)^2 - (3)^3] = (x + 3)(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)$

$y^5 - 32 = (y-2)[(y)^4 + (y)^3(2) + (y)^2(2)^2 + (y)(2)^3 + (2)^4] = (y-2)(y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16)$

$y^5 + 32 = (y+2)[(y)^4 - (y)^3(2) + (y)^2(2)^2 - (y)(2)^3 + (2)^4] = (y+2)(y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 8y + 16)$

De esta forma se trabajaron los casos más comunes de factorización de polinomios, y se agregaron ejemplos en los que los polinomios se descomponen en tres o más factores, casos muy frecuentes en la aplicación de la factorización en la resolución de diversos ejercicios, como estos:

Descomponer en tres factores el polinomio $3x^3 - 18x^2y + 27xy^2$
Este trinomio tiene factor común: $3x$
$3x^3 - 18x^2y + 27xy^2 = 3x\,(x^2 - 6xy + 9y^2)$
El segundo factor que se ha obtenido es un trinomio cuadrado perfecto:
$x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$, por lo que los factores de $3x^3 - 18x^2y + 27xy^2$ son:
$3x^3 - 18x^2y + 27xy^2 = 3x\,(x - 3y)^2$. (Baldor página 172)

Descomponer en cuatro factores el polinomio $2x^4 - 32$
$2(x^4 - 16)$ Por factor común.
$x^4 - 16 = (x^2 - 4)\,(x^2 + 4)$ Diferencia de cuadrados
$x^2 - 4 = (x + 2)\,(x - 2)$ Diferencia de cuadrados
Entonces los factores de $2x^4 - 32$ son $(2)\,(x^2 + 4)\,(x - 2)\,(x + 2)$
(Baldor página 173)

Descomponer el polinomio $x^9 - xy^8$
$x^9 - xy^8 = x\,(x^8 - y^8)$ Factor común
$x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)\,(x^4 + y^4)$ Diferencia de cuadrados
$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2)$ Diferencia de cuadrados
$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$ Diferencia de Cuadrados
Entonces los factores de $x^9 - xy^8$ son $(x)\,(x^4 + y^4)\,(x^2 + y^2)\,(x + y)\,(x - y)$

CAPÍTULO VIII

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES.

Las actividades se realizaron en las siguientes fechas:

ACTIVIDADES	FECHAS
Presentación del proyecto a estudiantes	2 de mayo
Evaluación diagnóstica	3 de mayo
Actividades de retroalimentación de temas previos a la enseñanza de la factorización	Del 4 al ll de mayo
Importancia de la factorización	12 de mayo
Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Identificación del factor común	15 y 16 de mayo
Factorización de polinomios por factor común y factor común por agrupación de términos	17 y 18 de mayo
Productos notables y su relación con casos de factorización. Cuadrado de la suma o diferencia de dos términos. Factorización del trinomio cuadrado perfecto.	19 al 24 de mayo
Producto de la suma por la diferencia de dos términos. Factorización de la diferencia de cuadrados	25 y 26 de mayo
Producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ Factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	19 al 31 de mayo
Producto de dos binomios de la forma $(nx + a)(mx + b)$ Factorización del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	1 al 3 de junio
Cubo de un binomio	Del 5 al 8 de junio
Cocientes notables	9 de junio

Factorización de la suma o diferencia de cubos	13 – 15 de junio
Factorización de la suma o diferencia de dos potencias de igual exponente	20 – 22 de Junio
Ejemplos y ejercicios que combinan dos o más casos de factorización	27 y 28 de junio
Mínimo común denominador de expresiones algebraicas fraccionarias. Operaciones con fracciones algebraicas,	5 y 6 de julio
Evaluación final	12 de julio

CAPÍTULO IX

RESULTADOS.

Durante la realización de las actividades de enseñanza – aprendizaje, los estudiantes se mostraron muy motivados y espontáneos para participar. Al concluir el proceso, se practicó una evaluación escrita, que los estudiantes resolvieron en forma individual. Dicha evaluación constó de cuatro partes: la primera parte fue una serie de 10 ítems de análisis en que se presentaron enunciados para juzgar su valor -falso o verdadero-. La segunda parte estuvo conformada por cinco ejercicios de cocientes notables. La tercera parte con diez ejercicios de productos notables y la cuarta parte con diez ejercicios de factorización que incluyen diversos casos de descomposición en factores.

Los resultados de la evaluación se presentan a continuación. Transcribiendo los ítems de cada parte de la evaluación y el número de respuestas correctas e incorrectas.

<u>PRIMERA PARTE</u>

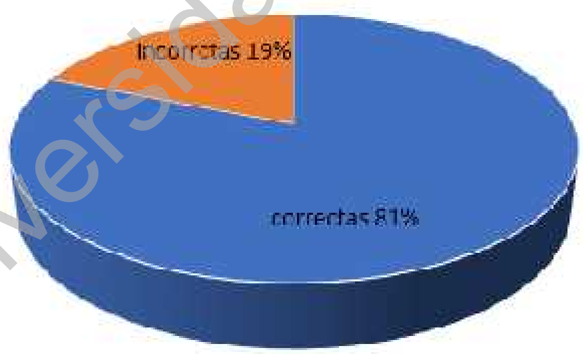
Analice cada uno de los enunciados y escriba en el paréntesis respectivo una letra V si el enunciado es verdadero, o una letra F si es falso. Por favor utilice lapicero.

ITEM	Respuestas correctas	Respuestas no correctas
Un producto notable es el que puede darse por simple observación, es decir, sin efectuar la multiplicación.	113	7
Al elevar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto.	97	23
La diferencia de dos cubos solo es divisible por la suma de sus raíces cúbicas.	75	45
El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ es el resultado de multiplicar dos binomios que tienen igual el primer término y diferente el segundo.	99	21
El trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ se obtiene al elevar al cuadro un binomio.	91	29
Llamamos factores de un polinomio a las		

expresiones algebraicas que multiplicadas dan como producto dicho polinomio.	99	21
Cualquier polinomio puede descomponerse en factores.	101	19
Una suma de dos cuadrados perfectos es divisible solo entre la suma de sus raíces cuadradas.	81	39
El cubo de un binomio es un polinomio de cuatro términos.	98	22
La representación gráfica de un trinomio cuadrado perfecto equivale al área de un cuadrado.	118	2

TOTAL: 972 228

Estas respuestas dan 81% de asertividad. Los ítems que tuvieron mayor número de respuestas incorrectas son los que relacionan la aplicación de cocientes de la suma o diferencia de potencias de exponentes iguales e impares. Quizá hizo falta practicar un poco más estos casos de cocientes notables.



Gráfica 1. Porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. Parte primera.

SEGUNDA PARTE

INSTRUCCIONES: escriba por simple observación los siguientes cocientes. Escriba sus respuestas con lapicero.

ejercicios	Respuestas Correctas	Respuestas incorrectas
$\frac{x^2 \mathrm{Z} 16}{x \Gamma 4}$	90	30
$\frac{n^4 \mathrm{Z} 81}{n \mathrm{Z} 3}$	72	48
$\frac{y^5 \Gamma 32}{y \Gamma 2}$	87	33
$\frac{a^3 \Gamma b^3}{a \Gamma b}$	81	39
$\frac{x^7 \mathrm{Z} y^7}{x \mathrm{Z} y}$	76	44

406

194

67.67% 32.23%

Las respuestas de esta segunda parte tienen el 67.67% de asertividad.

El porcentaje de respuestas correctas de esta parte de la evaluación reflejan la debilidad debido a que hizo falta practicar más con los estudiantes los casos de cocientes notables.

Gráfica 2. Porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. Parte segunda.

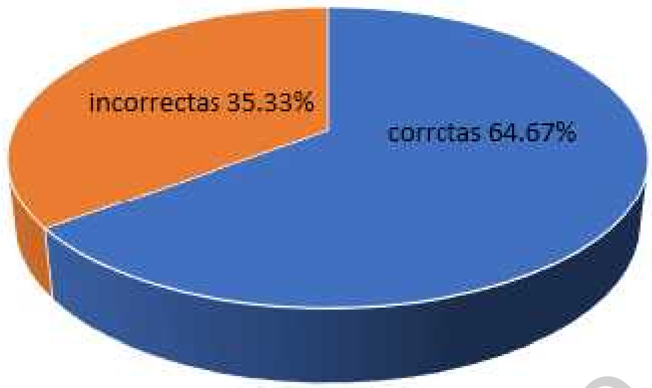
TERCERA PARTE

INSTRUCCIONES: escriba por simple observación los siguientes productos. Escriba sus respuestas con lapicero.

Ejercicios	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
$(x+5)^2$	111	9
$(2x-1)^2$	80	40
$(2x+4)(2x-4)$	73	47
$(x+2y)^2$	65	55
$(3n-5)(n+2)$	72	48
$(-6+a)(a+6)$	69	51
$\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2$	82	38
$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2$	63	57
$(a+3)(a+5)$	99	21
$\left(3m+\frac{b}{2}\right)^2$	62	78
	776	424
	64.67%	35.33%

Las respuestas correctas en esta tercera sección representan el 64.67%

En esta sección se evaluó el aprendizaje de los estudiantes en el tema de productos notables. Los casos mejor aprendidos fueron el cuadrado de la suma de dos términos, el cuadrado de la diferencia de dos términos, el producto de dos binomios de la forma *(x+a)(x+b)*, pero se notaron errores cuando en estos ejercicios se les incluyeron términos fraccionarios. Muchos estudiantes manifestaron tener dificultades al operar con términos fraccionarios.



Gráfica 3. Porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. Parte tercera.

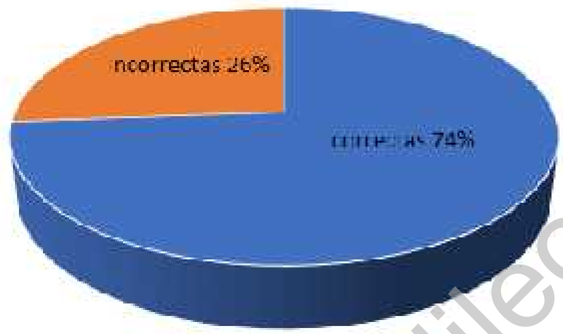
CUARTA PARTE

INSTRUCCIONES: Descomponga en factores los siguientes polinomios. Puede utilizar el reverso de estas hojas para operar procedimientos. Escriba sus respuestas con lapicero.

Ejercicios	**Respuestas correctas**	**Respuestas incorrectas**
$20 + x^2 - 21x$	96	24
$3x^3 - 9ax^2 - x + 3^a$	88	32
$20n^2 - 7n - 40$	89	31
$9x^2 - 1 + 16n^2 - 24nx$	96	24
$n^2x - 5b^2y^2 - n^2y^2 + 5b^2x$	79	41
$27 - 27x + 9x^2 - x^3$	83	37
$x^2 - 2x - 528$	83	37
$12x^2 - 7x - 12$	90	30
$100 - x^2y^4$	84	36
$32x^5 + 243$	99	21
	887	313
	74%	26%

En esta cuarta parte, las respuestas correctas equivalen al 74%

Los ejercicios de esta sección corresponden a casos de factorización. Los ejercicios con mejores resultados son trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, factorización por factor común con agrupación de términos, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, y la suma de dos potencias de exponente 5. Este último caso mencionado, sin embargo, nos deja la duda de por qué otros binomios no tuvieron la misma cantidad de resultados buenos, y la razón es que cuando se combinan exponentes, algunos estudiantes tienden a equivocarse.



Gráfica 4. Porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. Parte cuarta.

Reuniendo los resultados de cada parte de la evaluación, se llegó a un porcentaje general de 72.4% de asertividad, porcentaje muy similar a la media que se obtiene en datos agrupados en intervalos, como se puede apreciar más adelante.

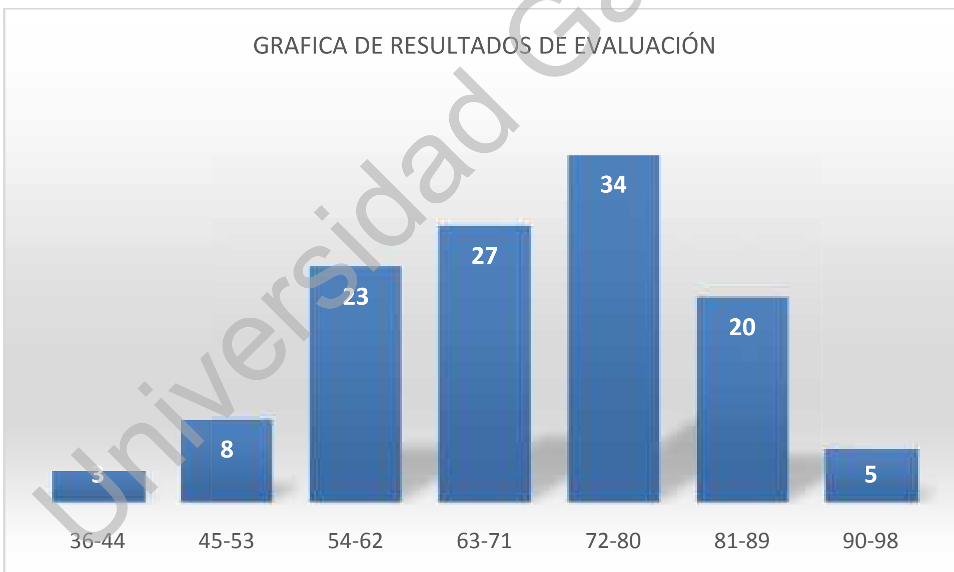
Observando detenidamente los resultados obtenidos, se encontró que en los ejercicios de cocientes notables hay mayor cantidad de respuestas correctas en la diferencia de cuadrados y le siguen en su orden, la suma o diferencia de cubos y con un poco menos de eficacia, la suma o diferencia de potencias de igual grado. Estas apreciaciones coinciden con los resultados que se obtuvieron de los ejercicios de productos notables y, por supuesto, con los ejercicios de factorización, en los que se obtuvieron mejores resultados en el trinomio cuadrado perfecto, seguidos por los del factor común, luego los trinomios de las formas $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ y finalmente los binomios formados por la suma o diferencia de potencias de grado mayor que 3.

Cuantificando las respuestas de cada estudiante, calificados sobre 100 puntos, se alcanzaron resultados que se presentan en la siguiente tabla y datos estadísticos correspondientes.

X	Xm	f	fa	f.Xm
36 - 44	40	3	3	120
45 - 53	49	8	11	392
54 - 62	58	23	34	1334
63 - 71	67	27	61	1809
72 - 80	76	34	95	2584
81 - 89	85	20	115	1700
90 - 98	94	5	120	470
∑		120		8409

Tabla Estadística 1. Datos agrupados y frecuencias de resultados de Evaluación.

El dato más bajo en esta distribución es 36 y el más alto es 98. El total de datos del resultado de la evaluación se ilustran en la siguiente gráfica:



Gráfica 5. Gráfica de Barras con frecuencias absolutas.

Tabla y gráfica elaboradas por el autor.

Con los valores contenidos en la tabla anterior, se tienen las siguientes medidas de tendencia central:

Media: $\overline{X} \text{ X} \frac{f * Xm}{N} \text{ X} \frac{8409}{120} \text{ X} 70.075$

Mediana:

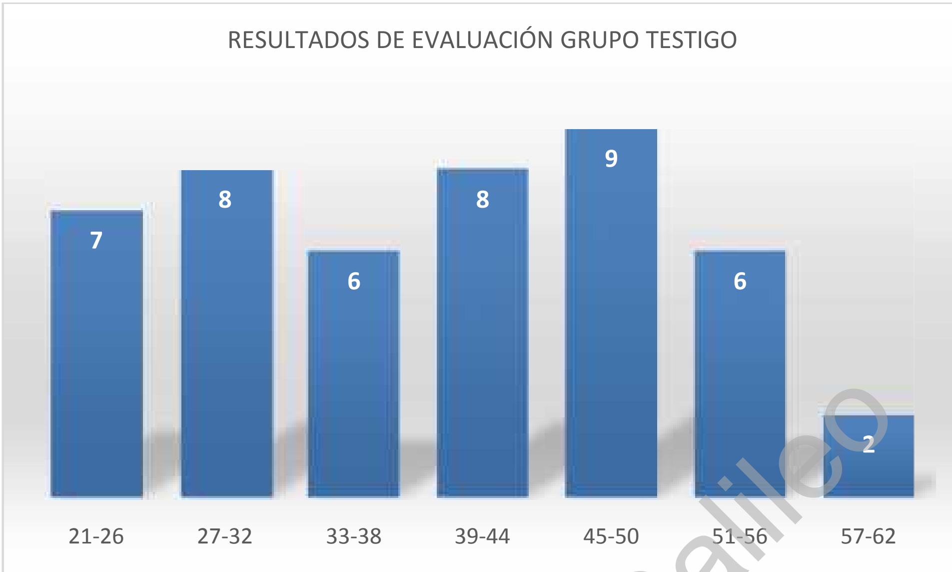
$$Mdn = li + \frac{i}{f_b}\left(\frac{N}{2} - fi\right) = 62.5 + \frac{9}{27}\left(\frac{120}{2} - 34\right) = 62.5 + 8.67 = 71.17$$

Moda = $3Mdn - 2\overline{X} = 3(71.17) - 2(70.075) = 73.36$

La Dirección del Colegio Preuniversitario Galileo y la Comisión de evaluación permitieron que la misma prueba se administrara a un grupo de estudiantes de Cuarto Bachillerato en Computación, Bachillerato Industrial y Perito en Computación y Perito en Diseño Gráfico. A dichos estudiantes no se les incluyó en las actividades de enseñanza aprendizaje de la Factorización con esta estrategia metodológica, sino que estudiaron este tema por aprendizaje de procedimientos y aplicación en la resolución de ejercicios. En total fueron 46 estudiantes, y los resultados se resumen en el siguiente cuadro y su gráfica respectiva.

X	**Xm**	**f**	**fa**	**f.Xm**
21 – 26	23.5	7	7	164.5
17 – 32	29.5	8	15	236.0
33 – 38	35.5	6	21	213.0
39 – 44	41.5	8	29	332.0
45 – 50	47.5	9	38	427.5
51 – 56	53.5	6	44	321.0
57 - 62	59.5	2	46	119.0
∑		46		1813.0

Tabla Estadística 2. Datos agrupados y frecuencias de resultados de Evaluación de grupo testigo.



Gráfica 6. Gráfica de Barras con frecuencias absolutas de grupo testigo.

Tabla y gráfica elaboradas por el autor.

Las medidas de tendencia central de esta distribución son:

Media: $\overline{X} = \frac{f * Xm}{N} = \frac{1813}{46} = 39.41$

Mediana: $Mdn = li + \frac{i}{f_b}\left(\frac{N}{2} - fi\right) = 38.5 + \frac{6}{8}\left(\frac{46}{2} - 21\right) = 38.5 + 1.5 = 40$

Moda = $3Mdn - 2\overline{X} = 3(40) - 2(39.41) = 41.18$

Analizando los resultados obtenidos por los dos grupos de estudiantes en esta evaluación, se establece una considerable diferencia en dichos resultados. En primer lugar, la media del grupo trabajado es 70.75, mientras que la media del grupo tomado como testigo es de 39.41. así mismo, la mediana para el primer grupo es de 71.17 y para el segundo grupo es de 40.

Estos resultados evidencian que fue bastante beneficioso el aporte en técnicas didácticas o metodológicas, al grupo trabajado, ya que sus resultados superan bastante a los del grupo testigo, y aunque las expectativas eran alcanzar con ellos, resultados mayores que los obtenidos, se puede afirmar que los mismos son satisfactorios.

Dos días después de realizada la evaluación de contenidos, se solicitó a los estudiantes que respondieran una encuesta de opinión sobre diversos aspectos relacionados con la actividad docente realizada. Para el efecto se les informó que no deberían de identificar su hoja con su nombre, para que se sintieran con libertad de externar su opinión. La hoja con las preguntas se reproduce a continuación:

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD REALIZADA EN LAS AULAS.

INSTRUCCIONES: Estimado estudiante, sírvase analizar cada uno de los aspectos y marque con una X la casilla correspondiente a su apreciación, con el siguiente parámetro:

1. Nada
2. Poco
3. Adecuado
4. Bastante

ASPECTOS A EVALUAR	**1**	**2**	**3**	**4**
¿Entendió el origen de los distintos procedimientos explicados en clase?				
¿Le pareció interesante el material preparado y utilizado en clase?				
¿Le ayudó el uso del material preparado en clase para el aprendizaje de la factorización?				
¿Considera haber aprendido los distintos casos de factorización?				
¿Percibió la relación existente entre la propiedad distributiva de la multiplicación y la factorización por factor común?				
¿Percibió la relación de productos y cocientes notables con la factorización de binomios y trinomios?				
¿Considera necesario haber aprendido factorización para seguir estudiando Matemática?				
¿Considera adecuada la cantidad de ejercicios realizados para cada caso de factorización?				

Al momento de solicitar esta información, se logró reunir una cantidad de 114 estudiantes por las cuatro secciones. Los resultados de cada pregunta de dicha encuesta se detallan a continuación.

Pregunta 1:

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Entendió el origen de los distintos procedimientos explicados en clase?	4	52	51	7
	3.52%	45.61%	44.74%	6.14%

El mayor porcentaje de estudiantes informó que entendió poco o en forma adecuada el origen de los procedimientos explicados en clase. También se tiene un 3.52% de los estudiantes que manifestó no haber entendido el origen de los procedimientos; esto se debe a que es tarea difícil cambiar paradigmas, tales estudiantes no ven tan pronto la importancia de conocer el origen de las reglas y procedimientos que se utilizan en Matemáticas, pues están habituados a aprender por memorización de tales procedimientos. Sin embargo, se puede notar que es muy bajo el porcentaje de los estudiantes con quienes no se alcanzó el logro esperado de un aprendizaje significativo; y para los que manifestaron haber comprendido poco, ya iniciaron el proceso correcto y con un adecuado seguimiento, mejorarán notablemente su aprendizaje.

Pregunta 2.

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Le pareció interesante el material preparado y utilizado en clase?	0	2	32	80
		1.75%	28.07%	70.18%

Se puede notar que al mayor porcentaje de estudiantes le pareció interesante el material que ellos mismos prepararon y utilizaron para facilitar su proceso de aprendizaje. Estos resultados confirman que los estudiantes se motivaron a aprender mediante estas actividades prácticas.

Pregunta 3,

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Le ayudó el uso del material preparado en clase para el aprendizaje de la factorización?	2	17	47	48
	1.75%	14.91%	41.28%	42.11%

En relación con este aspecto se encontró que un 41.28% y 42.11% han valorado como aceptable y bastante aceptable respectivamente el uso de las actividades prácticas para el aprendizaje de la factorización y tan solo un 1.75% y 14.91% considera que tales actividades prácticas no le ayudaron nada o le ayudaron poco en su aprendizaje.

Pregunta 4

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Considera haber aprendido los distintos casos de factorización?	1	43	49	21
	0.88%	37.72%	42.98%	18.42

Menos del 1% de los estudiantes considera no haber aprendido los distintos casos de Factorización. Esto también se evidencia en la evaluación, pues hay algunos que obtuvieron resultados muy bajos. Por su parte, un 37.72% manifestó haber aprendido poco y el mayor porcentaje, 42.98%, aprendió adecuadamente. Hay un porcentaje que merece atención, un 18.42% que considera haber aprendido bastante los distintos casos de factorización. Estas apreciaciones de los estudiantes son indicadores de logros positivos en el evento.

Pregunta 5

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Percibió la relación existente entre la propiedad distributiva de la multiplicación y la factorización por factor común?	6	25	60	23
	5.26%	21.93%	52.63%	20.18%

Los porcentajes en que se distribuyen las distintas respuestas a esta pregunta dan la pauta que, en su mayoría, los estudiantes percibieron la relación entre la propiedad distributiva de la multiplicación y la factorización por factor común. La percepción de esta relación es muy valiosa para conocer el origen del factor común al momento de factorizar un polinomio.

Pregunta 6

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Percibió la relación de productos y cocientes notables con la factorización de binomios y trinomios?	3	31	57	23
	2..63%	27.19%	50%	20.48%

El mayor porcentaje de estudiantes manifestó haber percibido la relación entre productos y cocientes notables con la factorización de binomios y trinomios. La percepción de esta relación favoreció el conocimiento del origen de los procedimientos utilizados para factorizar trinomios.

Pregunta 7

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Considera necesario haber aprendido factorización para seguir estudiando Matemática?	2	8	29	75
	1.75%	7.02%	25.44%	65.79%

Es un porcentaje bastante alto de estudiantes que ve la importancia de haber aprendido la factorización, como base primordial para seguir estudiando Matemática con éxito.

Pregunta 8

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
¿Considera adecuada la cantidad de ejercicios realizados para cada caso de factorización?	1	21	45	47
	0.88%	18.42%	39.47%	41.23%

En este aspecto, también es un alto porcentaje de estudiantes que ha creído que la cantidad de ejercicios realizados en clase para practicar los distintos casos de factorización ha sido adecuada.

Resumen General

ASPECTOS A EVALUAR	1	2	3	4
Todas las respuestas (de un total de 114 estudiantes)	19	199	370	324
	2.08%	21.82%	40.57%	35.53%

Al haber hecho un resumen de las respuestas aportadas por 114 estudiantes, se tienen los más altos porcentajes de opiniones manifestando que han sido aceptables y bastante aceptables las prácticas realizadas como parte de la estrategia didáctica seguida para fortalecer su aprendizaje.

CAPÍTULO X

CONCLUSIONES

La propuesta metodológica ofrecida a los estudiantes para la enseñanza-aprendizaje de la factorización de polinomios fue bien aceptada por la mayoría de ellos.

Con las actividades prácticas, en las que participaron activamente los estudiantes, se logró motivar el aprendizaje, condición indispensable para lograr la participación espontánea de los estudiantes.

Los resultados obtenidos demuestran que se mejoró considerablemente el aprendizaje de los estudiantes de cuarto Bachillerato en Ciencias Biológicas del Colegio Preuniversitario Galileo, en el tema de la Factorización de Polinomios.

Para lograr los resultados obtenidos, fue muy importante trabajar simultáneamente la propiedad distributiva de la multiplicación y la factorización por factor común, los productos notables y la factorización de trinomios, los cocientes notables y la factorización de binomios formados por la suma o diferencia de potencias de igual grado.

La combinación de demostraciones geométricas, soluciones algebraicas y comprobaciones aritméticas. Favoreció un aprendizaje más significativo, ya que permitió a los estudiantes conocer inductivamente el origen de los procedimientos aprendidos y su correcta aplicación en la resolución de ejercicios.

CAPÍTULO XI

RECOMENDACIONES

Para seguir con un aprendizaje significativo de la Factorización de Polinomios, es necesario motivar la participación de los estudiantes a través de actividades prácticas, como elaboración de material para ilustraciones y demostraciones geométricas de los procedimientos, que por ser un juego similar al de armar rompecabezas, atrae la atención y el análisis necesario para un buen aprendizaje.

Ofrecer a los estudiantes la oportunidad de estudiar simultáneamente la propiedad distributiva de la multiplicación y la factorización por factor común, los productos notables y la factorización de trinomios, los cocientes notables y la factorización de binomios formados por la suma o diferencia de potencias de igual grado. De esta manera los estudiantes redescubren el origen de los procedimientos, reafirman las reglas relacionadas a los procedimientos y luego aplican adecuadamente tales procedimientos en la resolución de ejercicios.

Promover siempre en el proceso Enseñanza Aprendizaje de la factorización de Polinomios, la demostración geométrica y su relación con las soluciones algebraicas y afianzar por medio de la comprobación aritmética, que se basa en el valor numérico de las expresiones algebraicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Abbagnano, N y Visalbergui, A. (1992) Historia de la Pedagogía. Novena reimpresión. Fondo de cultura Económica. Madrid, España.

Aponte, Gladys, Pagán, Estela y Pons, Francisca. (1998). Fundamentos de Matemáticas básicas. Editorial Addison Wesley. México.

Castro, Mónica. 2004. Polinomios. Compendio de matemática intermedia. Universidad del este.

Baldor, Aurelio. 1997. Álgebra. Publicaciones Cultural, S.A. de C.V. México D.F.

Martínez Aurora, Cegarra Juan Gabriel y Rubio Juan Antonio. (2012). Aprendizaje Basado en competencias: una propuesta para la autoevaluación del docente. Centro nacional de formación profesional, universidad de Cartagena.

Mejía Palomino, María Fernanda. (2004). Análisis Didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Universidad del Valle, Santiago de Cali. Colombia.

Nérici, Imídeo G. (1979). Hacia una didáctica general dinámica.

Ortiz de Jofre, Vilma Alicia (2014). Ideas Metodológicas para enseñar y aprender Matemática. Editorial Cara Parens, Universidad Rafael Landívar. Guatemala.

Stewart, James. Redlin, Lothard y Wattson, Saleem. (2012), Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. Editorial Cengage Learning S. A. México D. F.

Swokowski, Earl y Cole A, Jeffery (2011). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Décima tercera edición. Editorial Cengage Learning S. A. México D. F.

Vásquez Valerio, Francisco Javier (2006). Modernas estrategias para la Enseñanza. Tomo 2. Ediciones Euroméxico, S. A. de C. V. Estado de México.

Pérez Porto, Julián y Gardey, Ana. (2008). Definición de Didáctica. Recuperado de

(http://definicion.de/didactica/)
http://www.monografias.com/usuario/perfiles/dulce_vera_nica_da_az_la_pez/monografia

Rebollar Morote, Alfredo (2010). El objeto de la Matemática Educativa. http://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/arm

Revista RELME. (2000). Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Versión Electrónica. https://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml

http**s**.//es.m.wikipedia.org

https://www.ecure3d.cu/

Anexo

ANEXO

fotografías ilustrativas del proceso enseñanza aprendizaje de la factorización

Ilustración 1. Estudiantes preparando material manipulable

Ilustración 2. Estudiantes resolviendo geométricamente $(x+y)^2$

Ilustración 3. Estudiantes resolviendo gráficamente $(x + 2)^2$

Ilustración 4. Estudiantes resolviendo gráficamente $(x + 3)^2$

Ilustración 5. Estudiantes trabajando gráficamente la diferencia de cuadrados

Ilustración 6. Estudiantes demuestran gráficamente que x^2-y^2 = *(x+y) (x-y)*

Ilustración 7. Estudiantes trabajando gráficamente el trinomio x^2*+5x+4 = (x + 4) (x + 1)*

Ilustración 8: Estudiantes trabajando la factorización de $2x^2 + 8x + 6$

Ilustración 9. Estudiantes trabajando el cubo de un binomio

Guatemala, octubre 2018

MA Bayardo Mejía Monzón
Decano de la Facultad de Educación
Universidad Galileo

Estimado Señor Decano:

Por medio de la presente, yo, Miguel Audelio Velásquez García, identificado con carné número 10002074 y DPI 1837074431202, autorizo a la facultad de Educación a la publicación de mi trabajo de graduación titulado ESTRATEGIA PEDAGOGICA PARA EL APRENDIZAJE CON DESARROLLO DE COMPETENCIAS, DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS ALGEBRAICOS, DE ESTUDIANTES DE *PRIMER AÑO DIVERSIFICADO*, en el tesario virtual de la Universidad Galileo.

Como autor material de este trabajo, sustentado mediante el protocolo de la facultad de Educación, expreso que el mismo es de mi autoría y con contenido inédito, realizado con el acompañamiento experto de mi asesor, Ing. Aníbal Alonzo López Mazariegos, y por tanto he seguido los parámetros éticos y legales respecto de las citas de referencia y todo tipo de fuentes, establecidos en el Reglamento de la Universidad Galileo.

Atentamente

Miguel Audelio Velásquez García
Carné 10002074